FÍSICA

APRÈN UPC

Problemes

Problemas de óptica geométrica e instrumental

Unidad 9: 9.2. Asociación de lentes delgadas y dioptrios planos

Jaume Escofet Soteras

Assignatura: Òptica geomètrica

Titulació: Grau en Òptica I Optometria

Curs: 1r Quadrimestre: 1r

Facultat d'Òptica i Optometria de Terrassa (FOOT)

Idioma: Castellà

21/06/2022

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

PROBLEMAS DE ÓPTICA GEOMÉTRICA E INSTRUMENTAL

Unidad 9:

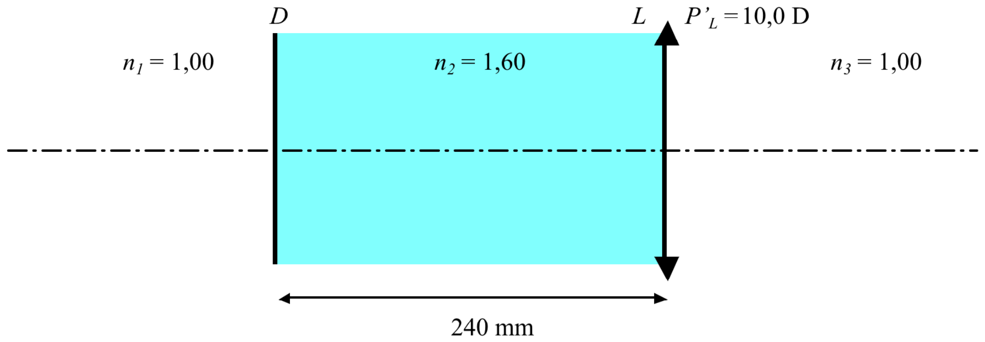
9.2 Asociación de lentes delgadas y dioptrios planos

Jaume Escofet

UNIDAD 9. 9.2 PROBLEMAS

Asociación de una lente delgada y un conjunto de dioptrios planos

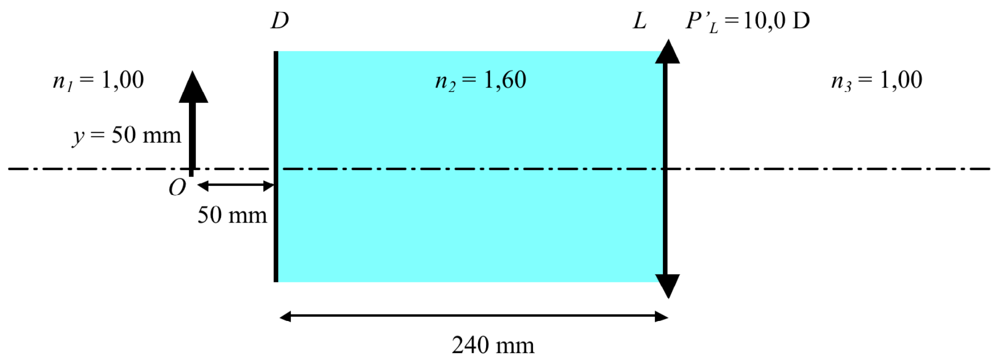
1. Sea un sistema formado por un dioptrio plano *D* y una lente delgada *L* de potencia $P' = 10,0$ D según se muestra en la figura. Determina la posición de los elementos cardinales de este sistema.



R/ $LH = -90$ mm; $LH' = 0$ mm; $LF = -190$ mm; $LF' = 100$ mm.

---

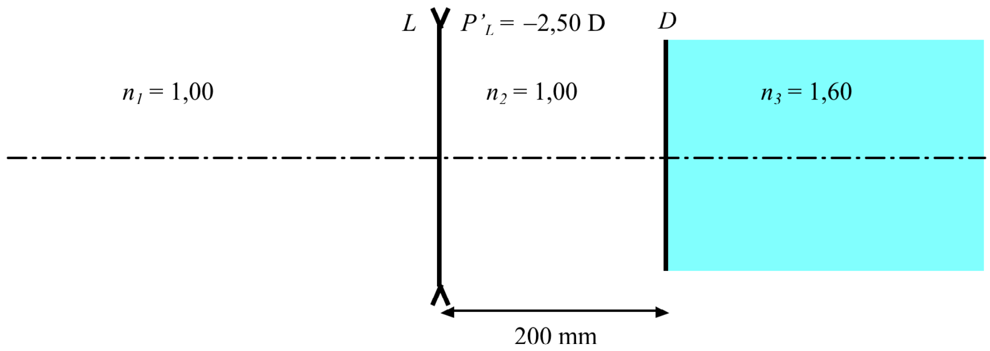
2. Determina la posición, el carácter y el aumento de la imagen en el caso siguiente:



R/ $LO' = 200$ mm; Real; $m = -1$.

---

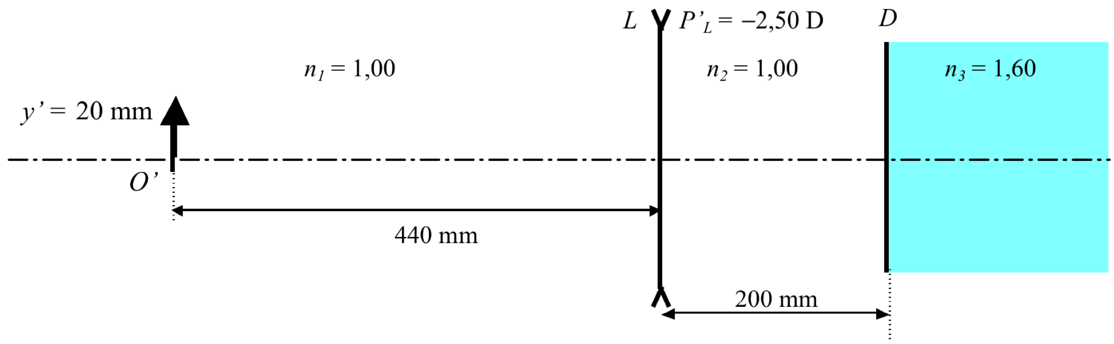
3. Sea un sistema formado por una lente delgada L de potencia $P' = -2{,}50$ D un dioptrio plano D según se muestra en la figura. Determina la posición de los elementos cardinales de este sistema.



R/ $LH = 0$ mm; $LH' = -120$ mm; $LF = 400$ mm; $LF' = -760$ mm.

---

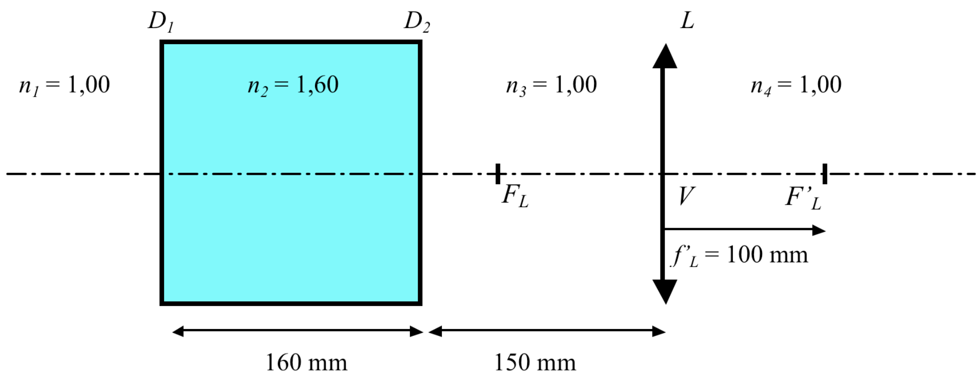
4. Conocida la posición y el tamaño de la imagen, determina la posición, el carácter y el tamaño del objeto en el sistema siguiente:



R/ $LO = -400$ mm; Virtual; $m = 1/2$.

---

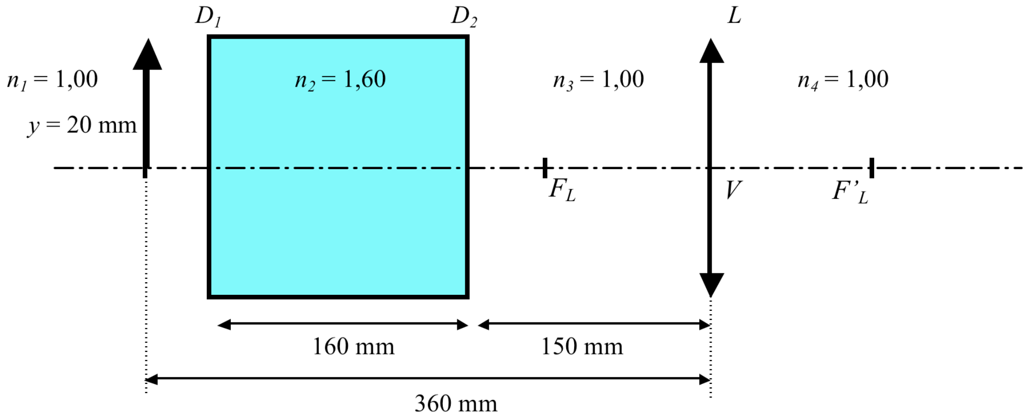
5. Considera la asociación de una lámina planoparalela y una lente delgada que se muestra en la figura. Determina la posición de los elementos cardinales este sistema:



R/ $LH = -60$ mm; $LH' = 0$ mm; $LF = -160$ mm; $LF' = 100$ mm.

---

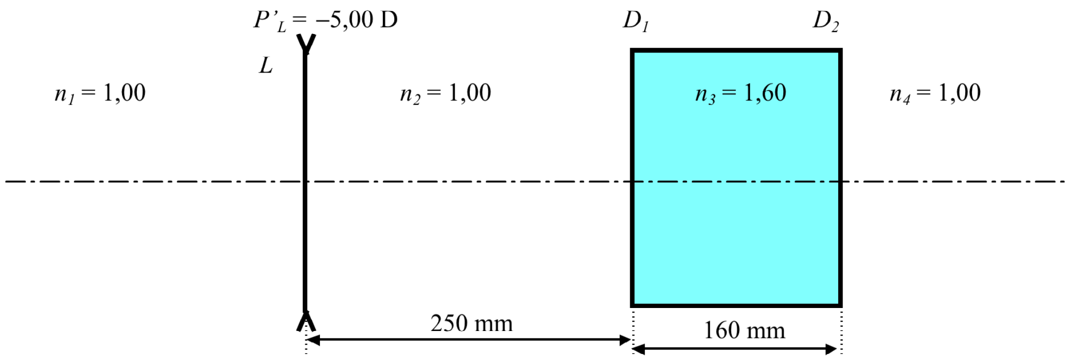
6. Determina la posición, el carácter y el aumento de la imagen en el caso siguiente:



R/ $LO' = -150$ mm; Real; $m = -1/2$.

---

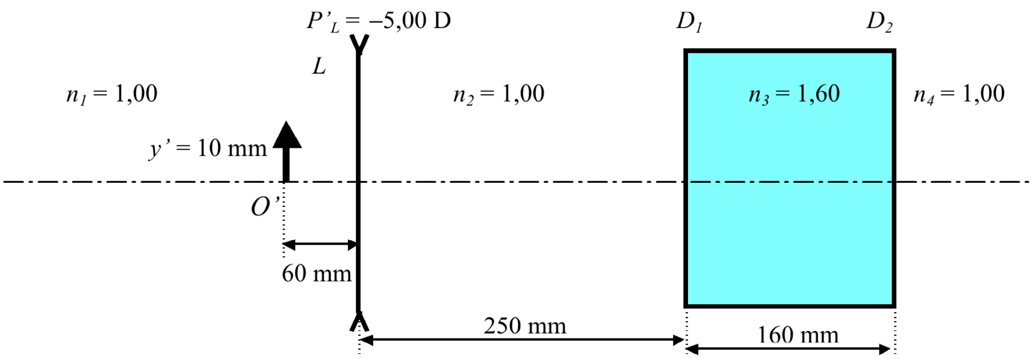
7. Considera la asociación de una lente delgada negativa y una lámina planoparalela según se muestra en la figura. Determina la posición de los elementos cardinales de este sistema:



R/ $LH = 0$ mm; $LH' = 60$ mm; $LF = 200$ mm; $LF' = -140$ mm.

---

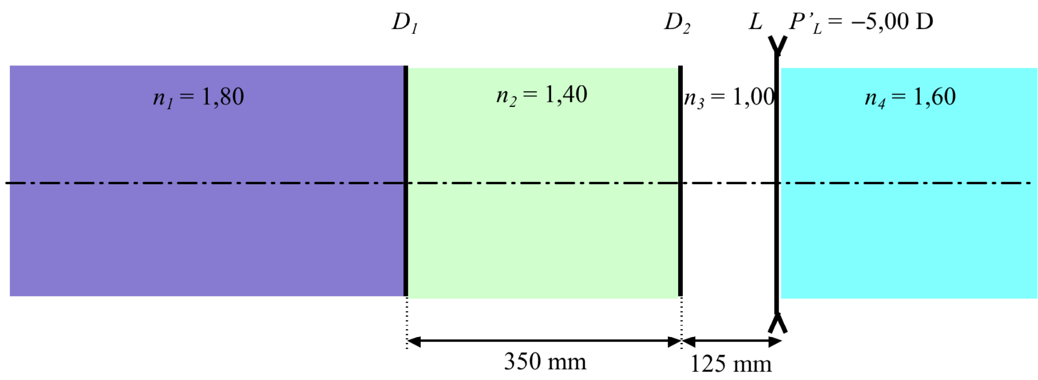
8. Conocida la posición y el tamaño de la imagen, determina la posición, el carácter y el tamaño del objeto en el sistema siguiente:



R/ $LO = -300$ mm; Real; $m = 0{,}40$.

---

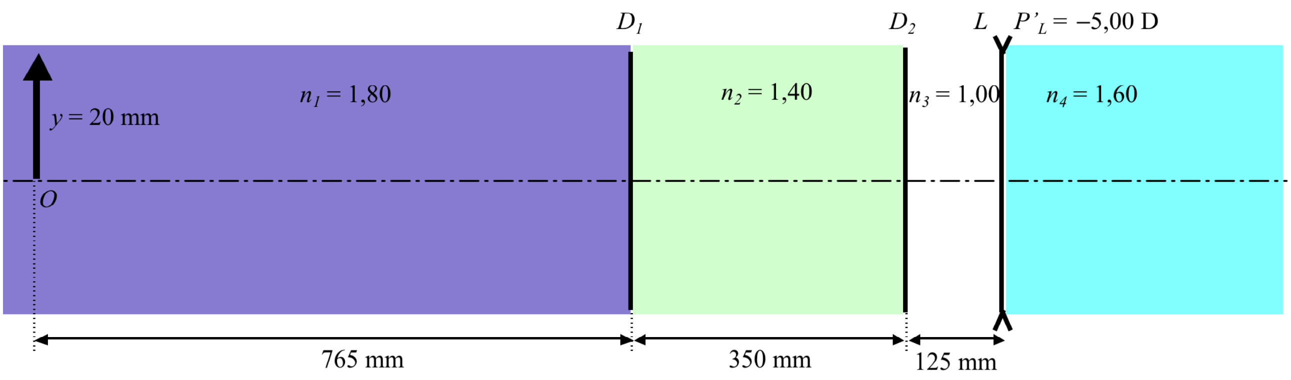
9. Sea un sistema formado por los dioptrios planos D_1 y D_2 y la lente delgada L de potencia $P' = -5{,}00$ D según se muestra en la figura. Determina la posición de los elementos cardinales de este sistema.



R/ $LH = 200$ mm; $LH' = 0$ mm; $LF = 560$ mm; $LF' = -320$ mm.

---

10. Conocida la posición y el tamaño del objeto, determina la posición, el carácter y el tamaño de la imagen en el sistema siguiente:



R/ $LO' = -256$ mm; Real; $m = 0{,}20$.

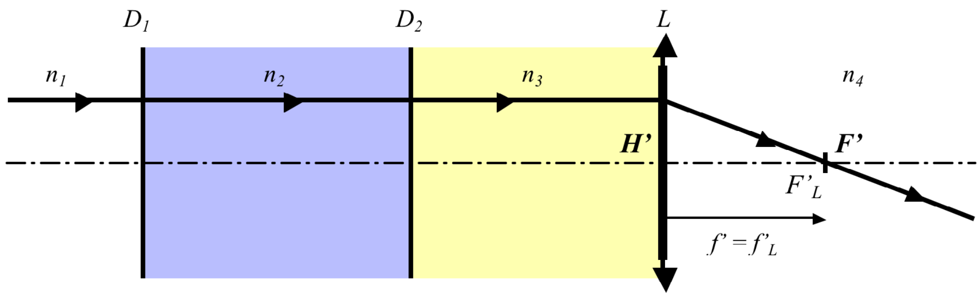
Comentarios a los problemas de la Unidad 9.2

Los dioptrios planos no desvian los rayos que inciden paralelos al eje óptico.

Caso 1: Dioptrio plano o asociación de dioptrios planos situados delante de la lente *L*.

En este caso la focal imagen del sistema *F'* estará situado en la focal imagen de la lente F'_L.

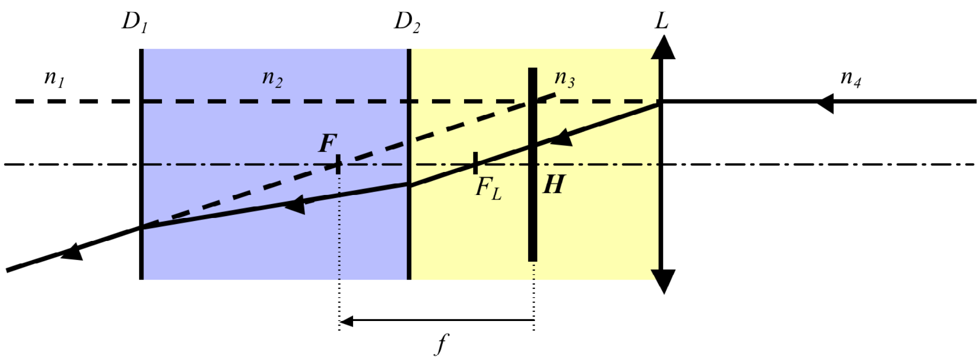
La posición del plano principal imagen *H'* coincidirá con el plano de la lente *L*.



H será el conjugado objeto de *H'* a través de todo el sistema óptico (la lente *L* y todos los dioptrios).

Para encontrar la posición de la focal objeto *F* se puede proceder de dos maneras diferentes.

La primera considera que *F* es el conjugado objeto de F_L a través del conjunto de dioptrios.



La segunda tiene en cuenta que $P' = -P$ donde *P* es la potencia objeto del sistema y *P'* es la potencia imagen del sistema. De este modo la distancia focal objeto *f* del sistema vendrá dada por:

$$\frac{f}{n} = -\frac{f'}{n'}$$

Donde n y n' representan los índices extremos del sistema. Tomando en nuestro caso $n = n_1$ y $n' = n_4$, f viene dada por:

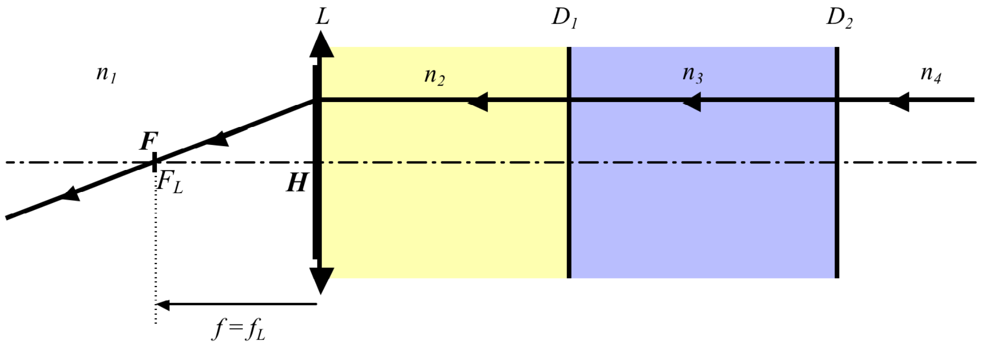
$$f = -\frac{n_1}{n_4} f'$$

Conocida la posición de H y conocida la distancia focal f puede determinarse la posición de F teniendo en cuenta que $f = HF$.

Caso 2: Dioptrio plano o asociación de dioptrios planos situados detrás de la lente L.

En este caso la focal objeto del sistema F estará situado en la focal objeto de la lente F_L.

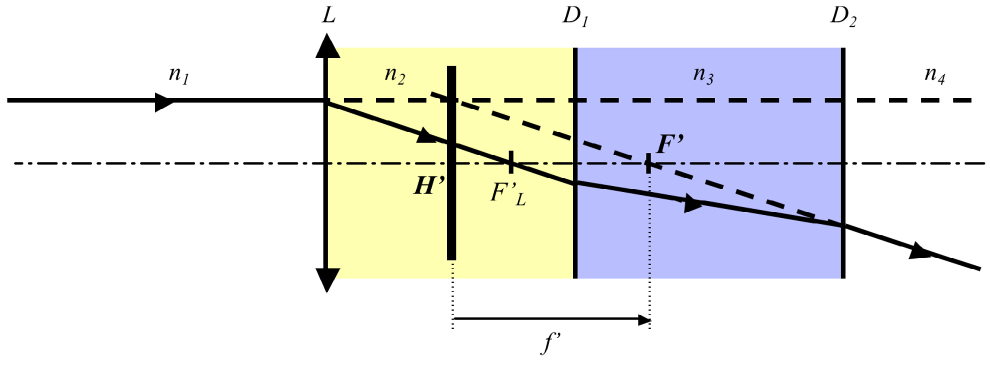
La posición del plano principal objeto H coincidirá con el plano de la lente L.



H' será el conjugado imagen de H a través de todo el sistema óptico (la lente L y todos los dioptrios).

Para encontrar la posición de la focal imagen F' se puede proceder de dos maneras diferentes.

La primera considera que F' es el conjugado imagen de F'_L a través del conjunto de dioptrios.



La segunda tiene en cuenta que $P' = -P$ donde P es la potencia objeto del sistema y P' es la potencia imagen del sistema. De este modo la distancia focal imagen f' del sistema vendrá dada por:

$$\frac{f}{n} = -\frac{f'}{n'}$$

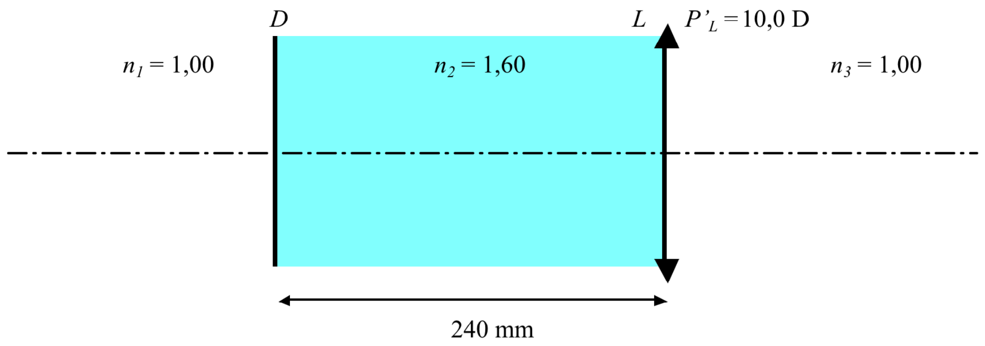
Donde n y n' representan los índices extremos del sistema. Tomando en nuestro caso $n = n_1$ y $n' = n_4$, f' viene dada por:

$$f' = -\frac{n_4}{n_1} f$$

Conocida la posición de H' y conocida la distancia focal f' puede determinarse la posición de F' teniendo en cuenta que $f' = H'F'$.

UNIDAD 9. 9.2 SOLUCIONES

1. Sea un sistema formado por un dioptrio plano D y una lente delgada L de potencia $P' = 10{,}0$ D según se muestra en la figura. Determina la posición de los elementos cardinales de este sistema.



SOLUCIÓN:

Distancias focales de la lente L:

$$f'_L = \frac{n'}{P'_L} = \frac{n_3}{P'_L} = \frac{1{,}00}{10{,}0} = 0{,}100 \text{ m} = 100 \text{ mm}.$$

$$f_L = \frac{n}{P_L} = \frac{n_2}{-P'_L} = -\frac{1{,}60}{10{,}0} = -0{,}160 \text{ m} = -160 \text{ mm}.$$

Las distancias focales f_L y f'_L no coinciden en valor absoluto ya que la lente L está sumergida en medios extremos diferentes.

a) Determinación de H' y F' del sistema:

Utilizando trazado gráfico de rayos se deduce que H' coincide con la posición de L y F' con la posición de F'_L (Figura 1).

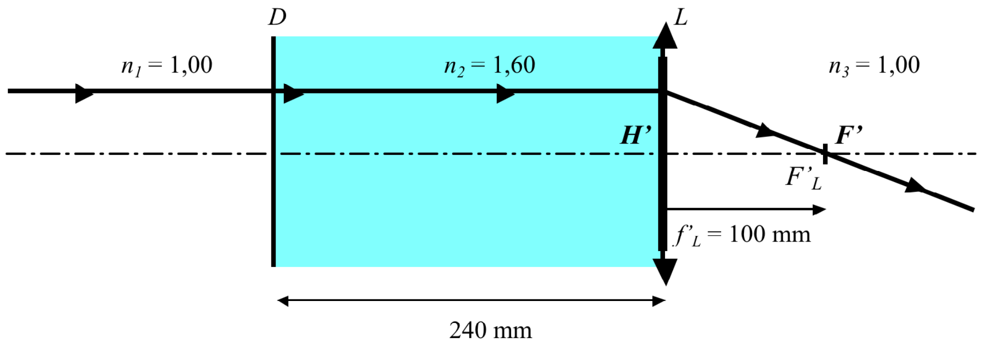


Figura 1

$$LH' = 0 \text{ mm}.$$

$$LF' = LF'_L = 100 \text{ mm}.$$

$$f' = H'F' = H'L + LF' = 0 + 100 = 100 \text{ mm}.$$

La potencia imagen *P'* del sistema es:

$$P' = \frac{n'}{f'} = \frac{n_3}{f'} = \frac{1{,}00}{0{,}100} = 10{,}0 \text{ D.}$$

b) Determinación de *H* y *F*:

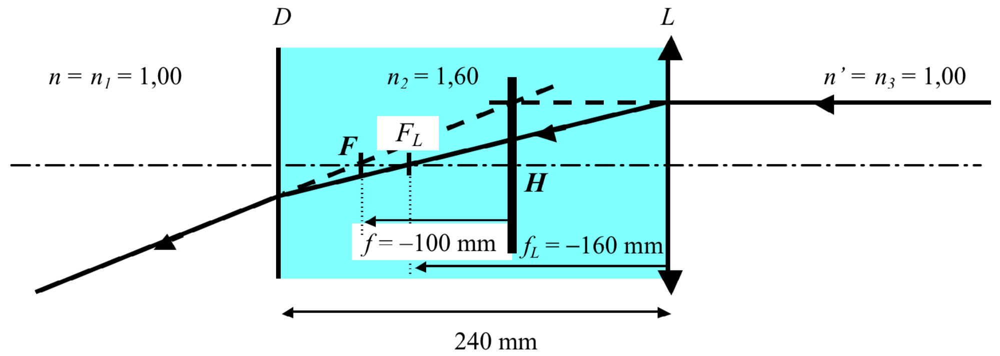


Figura 2

Teniendo en cuenta que el valor de las potencias objeto e imagen del sistema son iguales y cambiadas de signo:

$$P' = -P\,; \qquad P = -10{,}0 \text{ D.}\,; \qquad \frac{n'}{f'} = -10{,}0\,; \quad \frac{n_3}{f'} = -10{,}0\,; \quad \frac{1{,}00}{f'} = -10{,}0\,;$$

$$f' = H'F' = -0{,}100 \text{ m} = -100 \text{ mm.}$$

Posición de *F*:

Si consideramos la reversibilidad del rayo de luz la figura 3 muestra que F_L es el conjugado imagen de *F* a través del dioptrio *D*.

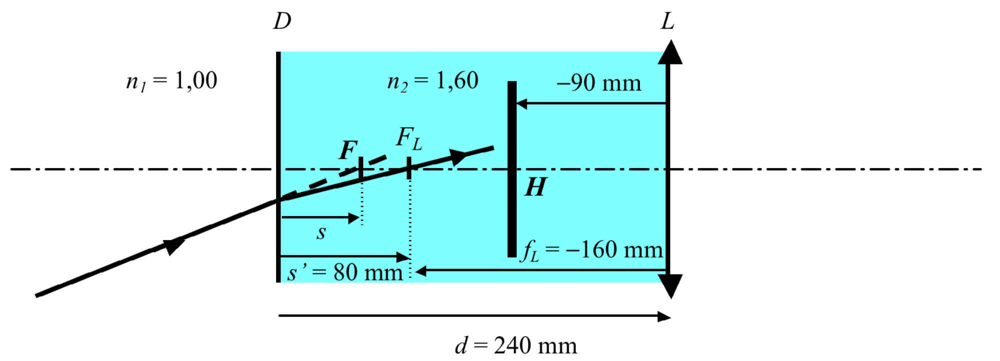


Figura 3

$$\bar{s} = \bar{s'}\,; \qquad \frac{s}{n} = \frac{s'}{n'}\,; \qquad \frac{s}{n_1} = \frac{s'}{n_2}\,; \qquad s = \frac{n_1}{n_2}s' = \frac{1{,}00}{1{,}60}80 = 50 \text{ mm} = DF.$$

$$LF = LD + DF = -240 + 50 = -190 \text{ mm.}$$

Posición de *H*:

H es el conjugado objeto de *H’* a través del sistema óptico.

Debido que *H’* está situado en la posición de *L*, *H* es el conjugado objeto de *H’* a través del dioptrio *D*.

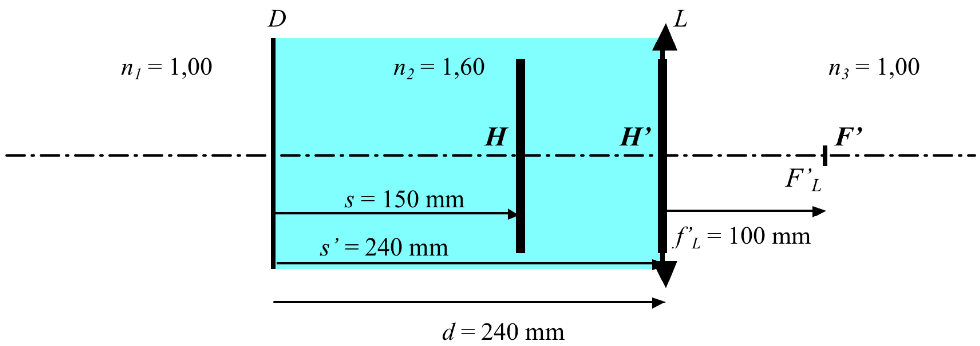


Figura 4

$$\bar{s} = \bar{s}'; \qquad \frac{s}{n} = \frac{s'}{n'}; \qquad \frac{s}{n_1} = \frac{s'}{n_2}; \qquad s = \frac{n_1}{n_2}s' = \frac{1{,}00}{1{,}60}240 = 150 \text{ mm} = DH.$$

$$LH = LD + DH = -240 + 150 = -90 \text{ mm}.$$

$$HH' = HL + LH' = 90 + 0 = 90 \text{ mm}.$$

Las posiciones de *H* y *F* pueden determinarse también a partir del sistema reducido en aire (Figura 5):

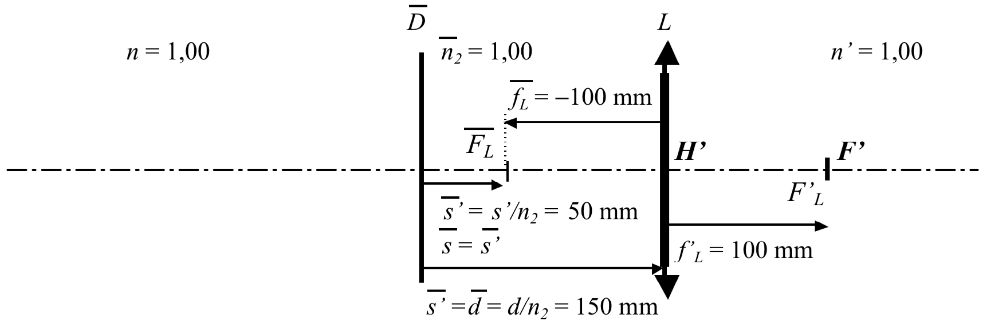


Figura 5

$$\overline{f_L} = \frac{f_L}{n_2} = \frac{-160}{1{,}60} = -100 \text{ mm}.$$

Posición de *F*: $s = n\bar{s} = 1{,}00(50) = 50 \text{ mm} = DF.$

Posición de *H*: $s = n\bar{s} = n\bar{d} = 1{,}00(150) = 150 \text{ mm} = DH.$

Valor que coincide con el encontrado anteriormente.

El sistema óptico equivamente al sistema anterior es el que se muestra en la figura 6:

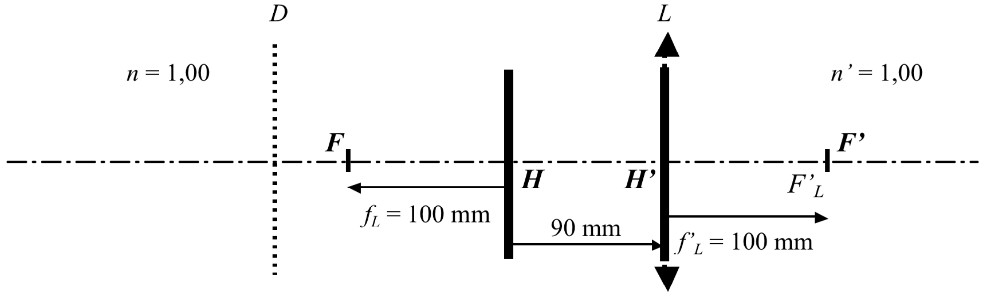


Figura 6

Una manera alternativa de resolver el problema es utilizando la asociación de sistemas ópticos. Consideremos el sostema óptico formado por la asociación de dos sistemas, el dioptrio plano D y la lente L (Figura 7).

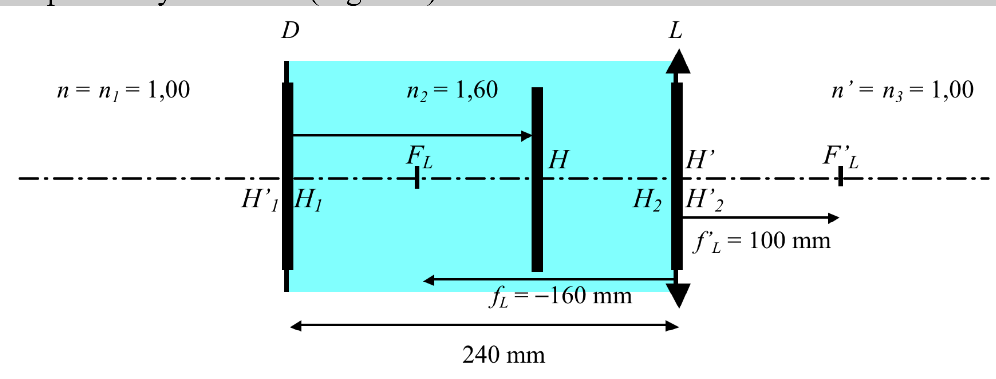


Figura 7

Las características del sistema son las siguientes:

1: Dioptrio plano D:	$P'_1 = P'_D = 0$ D;	$f'_1 = f'_D = \infty$;	$f_1 = \infty$.
2: Lente L:	$P'_2 = P'_L = 10{,}0$ D;	$f'_2 = f'_L = 100$ mm.	$f_2 = -160$ mm.
	$e = 240$ mm		
	$t = \infty$		

La potencia total del sistema es:

$$P' = P'_1 + P'_2 - \bar{e}P'_1 P'_2 = P'_1 + P'_2 - \frac{e}{n_2} P'_1 P'_2 = 0 + 10{,}0 - \frac{240}{1{,}60} 0 (10{,}0) = 10{,}0 \text{ D}.$$

$P = -10{,}0$ D.

Las focales del sistema son:

$$f' = \frac{n'}{P'} = \frac{1{,}00}{10{,}0} = 0{,}100 \text{ m} = 100 \text{ mm}.$$

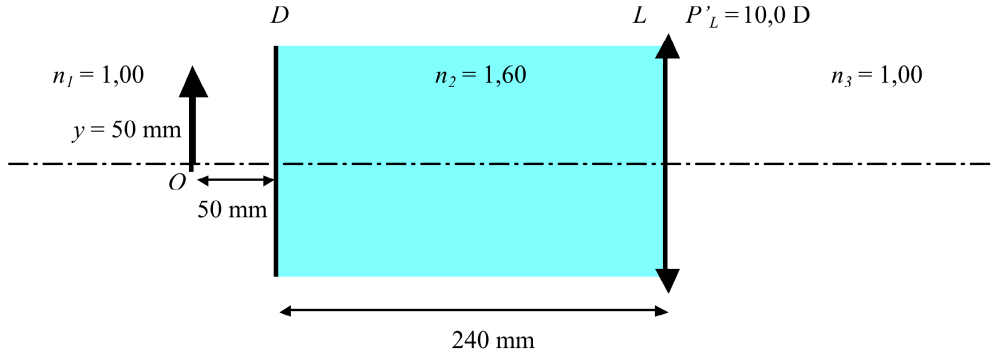
$$f = \frac{n}{P} = \frac{1{,}00}{-10{,}0} = -0{,}100 \text{ m} = -100 \text{ mm}.$$

Posición de los planos principales:

$$H_1 H = \frac{fe}{f_2} = \frac{-100(240)}{160} = 150 \text{ mm} = DH.$$

$$H'_2 H' = -\frac{f'e}{f'_1} = \frac{-100(240)}{\infty} = 0 \text{ mm} = LH'.$$

2. Determina la posición, el carácter y el aumento de la imagen en el caso siguiente:



SOLUCIÓN:

Consideremos los elementos cardinales del sistema anterior:

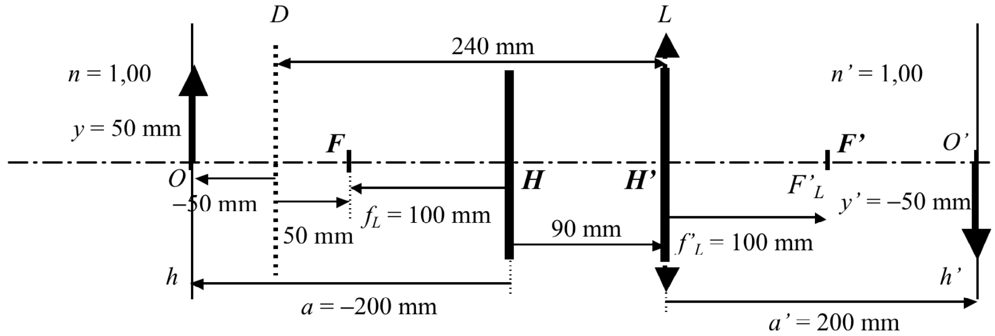


Figura 1

Aplicando la ecuación de Descartes:

$$-\frac{n}{a}+\frac{n'}{a'}=\frac{n'}{f'}; \qquad n = 1{,}00; \qquad n' = 1{,}00; \qquad f' = 100 \text{ mm}; \qquad a = HO = -200 \text{ mm}.$$

$$-\frac{1{,}00}{-200}+\frac{1{,}00}{a'}=\frac{1{,}00}{100}; \qquad \frac{1}{a'}=\frac{1}{100}-\frac{1}{200}=\frac{2-1}{200}=\frac{1}{200}; \qquad a' = H'O' = LO' = 200 \text{ mm}.$$

$$m=\frac{y'}{y}=\frac{a'}{a}=\frac{200}{-200}=-1$$

La imagen es real, por estar situada a la derecha de la lente *L*, invertida y del mismo tamaño.

El objeto *O* y la imagen *O'* estan situados, respectivamente, en los planos principales *h* y *h'* del sistema.

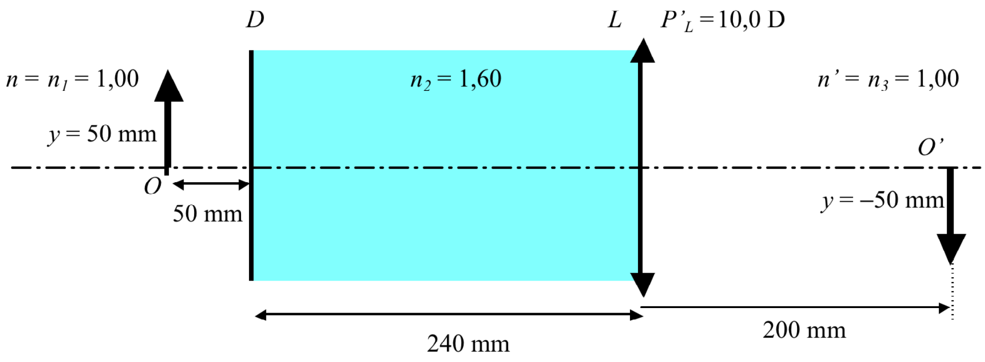
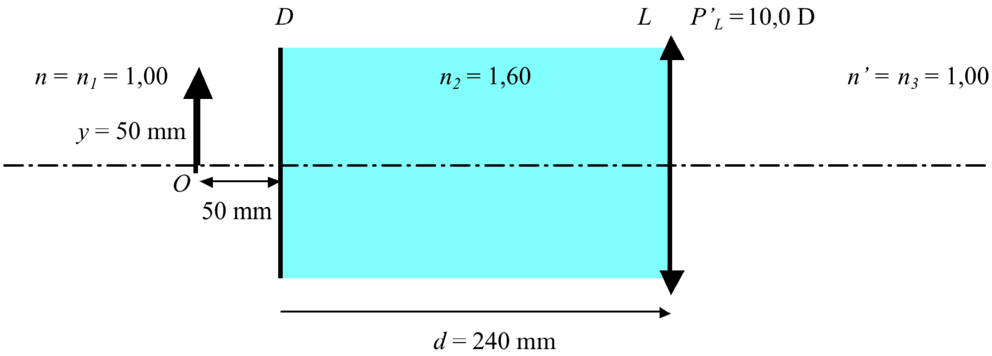


Figura 2

El ejercicio también puede solucionarse considerando el sistema reducido en aire:



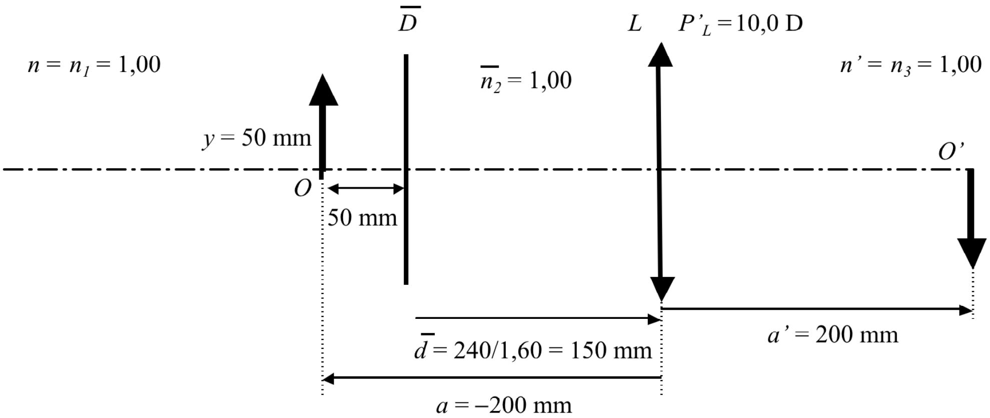


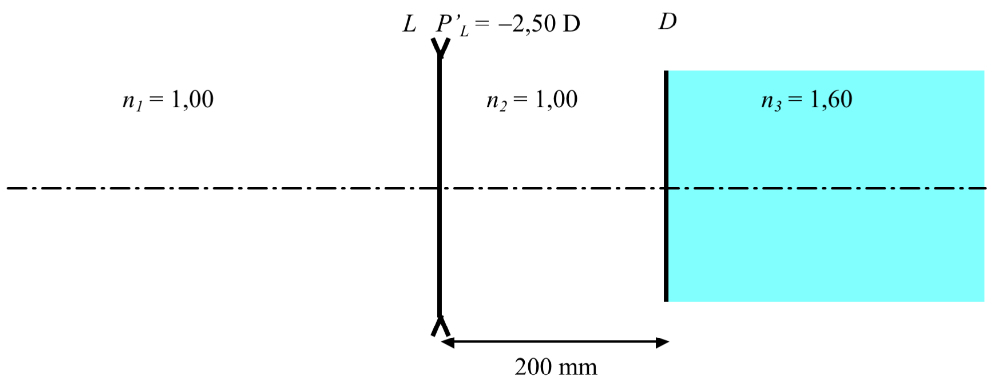
Figura 3

$$-\frac{n}{a}+\frac{n'}{a'}=\frac{n'}{f'}; \qquad n = 1{,}00; \qquad n' = 1{,}00; \qquad f' = 100 \text{ mm}; \qquad a = -200 \text{ mm}.$$

$$-\frac{2}{-200}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{100}; \qquad \frac{1}{a'}=\frac{1}{100}-\frac{2}{200}=\frac{2-1}{200}=\frac{1}{200}; \qquad a' = 200 \text{ mm} = LO'.$$

Resultado que coincide con el encontrado anteriormente.

3. Sea un sistema formado por una lente delgada L de potencia $P' = -2{,}50$ D un dioptrio plano D según se muestra en la figura. Determina la posición de los elementos cardinales de este sistema.



SOLUCIÓN:

Distancias focales de la lente L:

$$f'_L = \frac{n'}{P'_L} = \frac{n_2}{P'_L} = \frac{1{,}00}{-2{,}50} = -0{,}400 \text{ m} = -400 \text{ mm}.$$

$$f_L = \frac{n}{P_L} = \frac{n_1}{P_L} = \frac{1{,}00}{2{,}50} = 0{,}400 \text{ m} = 400 \text{ mm}.$$

Las distancias focales f_L y f'_L coinciden en valor absoluto ya que los índices anterior y posterior de la lente L son iguales.

a) Determinación de H y F:

Utilizando trazado gráfico de rayos se deduce que H coincide con la posición de L y F con la posición de F_L (Figura 1).

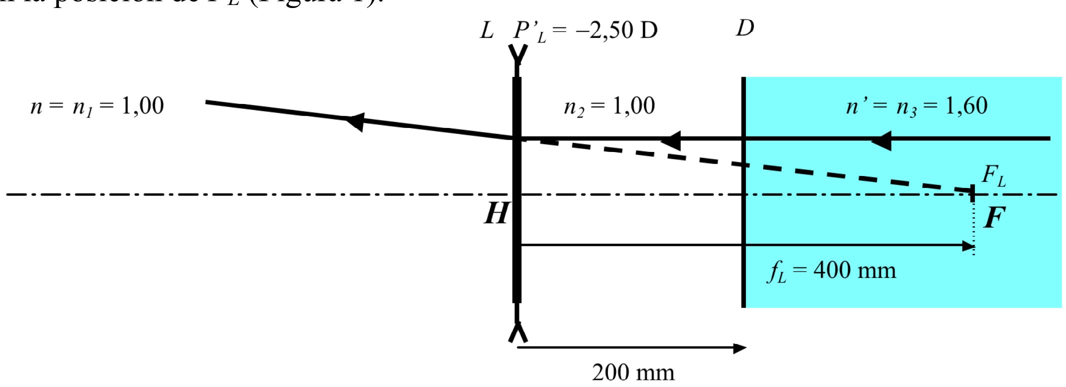


Figura 1

$$LH = 0 \text{ mm}.$$

$$LF = LF_L = 400 \text{ mm}.$$

La distancia focal objeto del sistema vale:

$$f = HF = HL + LF = 0 + 400 = 400 \text{ mm} = 0{,}400 \text{ m}.$$

La potencia objeto P del sistema es:

$$P = \frac{n}{f} = \frac{n_1}{f} = \frac{1{,}00}{0{,}400} = 2{,}5 \text{ D}.$$

b) Determinación de H' y F':

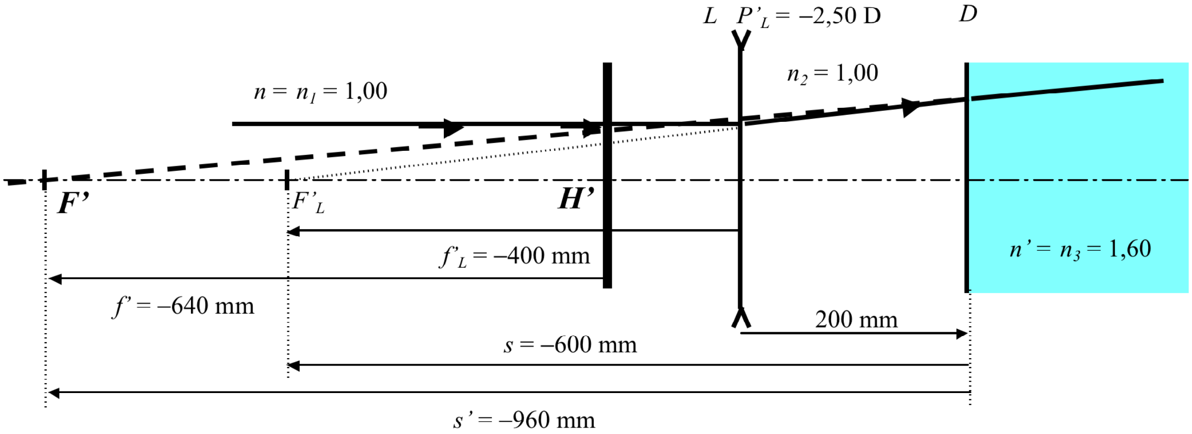


Figura 2

Teniendo en cuenta que el valor de las potencias objeto e imagen del sistema son iguales y cambiadas de signo:

$$P' = -P; \qquad P' = -2{,}5 \text{ D.}; \qquad \frac{n'}{f'} = -2{,}5; \quad \frac{n_3}{f'} = -2{,}5; \quad \frac{1{,}60}{f'} = -2{,}5;$$

$$f' = H'F' = -0{,}640 \text{ m} = -640 \text{ mm}.$$

Las distancias focales f y f' no coinciden en valor absoluto ya que el sistema está sumergido en medios extremos diferentes.

Posición de F':

Para determinar la posición de F' tenemos en cuenta, tal como se observa en la figura 2, que F' es el conjugado imagen de F'_L a través del dioptrio D.

$$s = DF'_L = DL + LF'_L = -200 - 400 = -600 \text{ mm}.$$

$$\bar{s} = \bar{s}'; \qquad \frac{s}{n} = \frac{s'}{n'}; \qquad \frac{s}{n_2} = \frac{s'}{n_3}; \qquad s' = n_3 \frac{s}{n_2} = 1{,}60 \frac{-600}{1{,}00} = -960 \text{ mm} = DF'.$$

$$LF' = LD + DF' = 200 - 960 = -760 \text{ mm}.$$

Posición de *H'*:

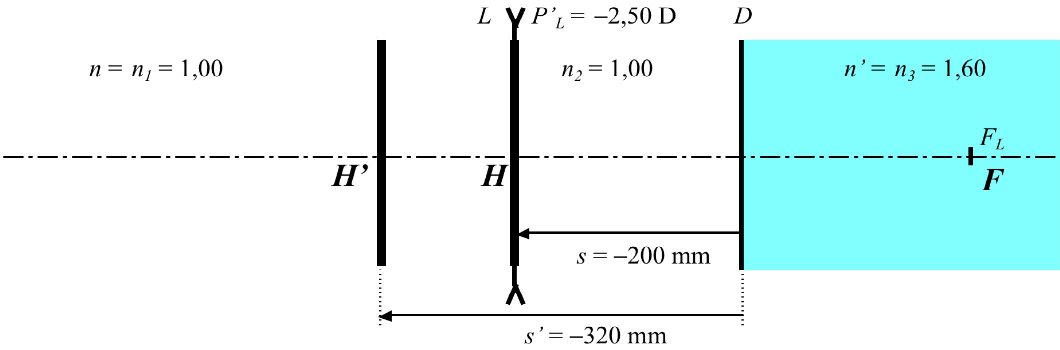


Figura 3

H' es el conjugado imagen de *H* a través del sistema óptico.

Debido que *H* está situado en la posición de *L*, *H'* es el conjugado imagen de *H* a través del dioptrio *D*.

$$s = DH = -200 \text{ mm}.$$

$$\bar{s} = \bar{s}'; \qquad \frac{s}{n} = \frac{s'}{n'}; \qquad \frac{s}{n_2} = \frac{s'}{n_3}; \qquad s' = n_3 \frac{s}{n_2} = 1{,}60 \frac{-200}{1{,}00} = -320 \text{ mm} = DH'.$$

$$LH' = LD + DH' = 200 - 320 = -120 \text{ mm}.$$

$$HH' = HL + LH' = 0 - 120 = -120 \text{ mm}.$$

Las posiciones de *F'* y *H'* pueden determinarse más facilmente a partir del sistema reducido en aire (Figura 4):

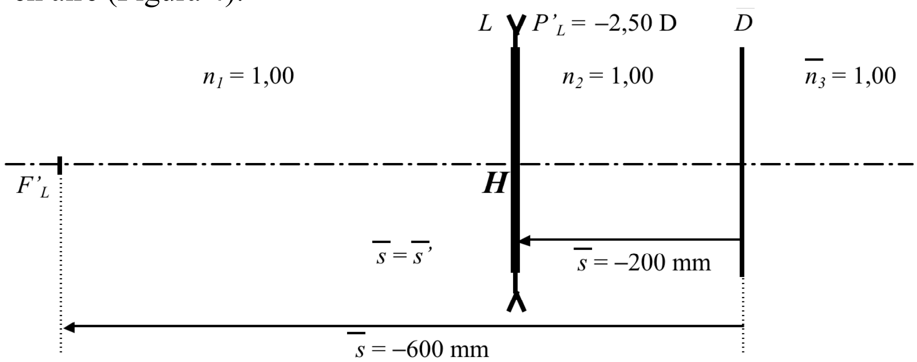


Figura 4

Posición de *F'*: $$s = n\bar{s} = n_3\bar{s} = 1{,}60(-600) = -960 \text{ mm} = DF'.$$

Posición de *H'*: $$s' = n'\bar{s} = n_3\bar{s} = 1{,}60(-200) = -320 \text{ mm} = DH'.$$

Valor que coincide con el encontrado anteriormente.

El sistema óptico equivamente al sistema anterior es el que se muestra en la figura 5:

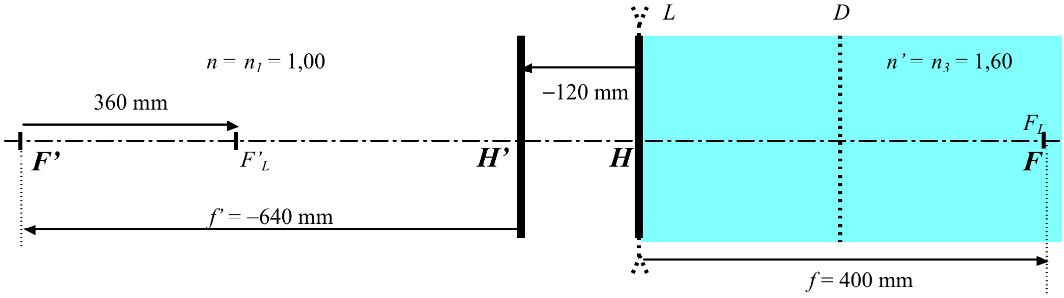


Figura 5

Una manera alternativa de resolver el problema es utilizando la asociación de sistemas ópticos. Consideremos el sostema óptico formado por la asociación de dos sistemas, el dioptrio plano D y la lente L (Figura 6).

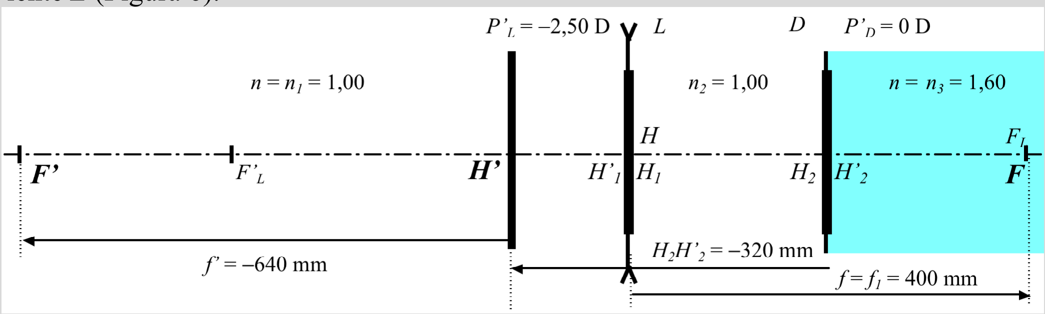


Figura 6

Las características del sistema son las siguientes:

1: Lente L:	$P'_1 = P'_L = -2{,}50$ D;	$f'_1 = f'_L = -400$ mm.	$f_1 = 400$ mm.
2: Dioptrio plano D:	$P'_2 = P'_D = 0$ D;	$f'_2 = f'_D = \infty$;	$f_2 = \infty$.
	$e = 200$ mm		
	$t = \infty$		

La potencia total del sistema es:

$$P' = P'_1 + P'_2 - \bar{e}P'_1P'_2 = P'_1 + P'_2 - \frac{e}{n_2}P'_1P'_2 = -2{,}50 + 0 - \frac{200}{1{,}00}(-2{,}50)0 = -2{,}50 \text{ D}.$$

$P = 2{,}50$ D.

Las focales del sistema son:

$$f' = \frac{n'}{P'} = \frac{1{,}60}{-2{,}50} = -0{,}640 \text{ m} = -640 \text{ mm}.$$

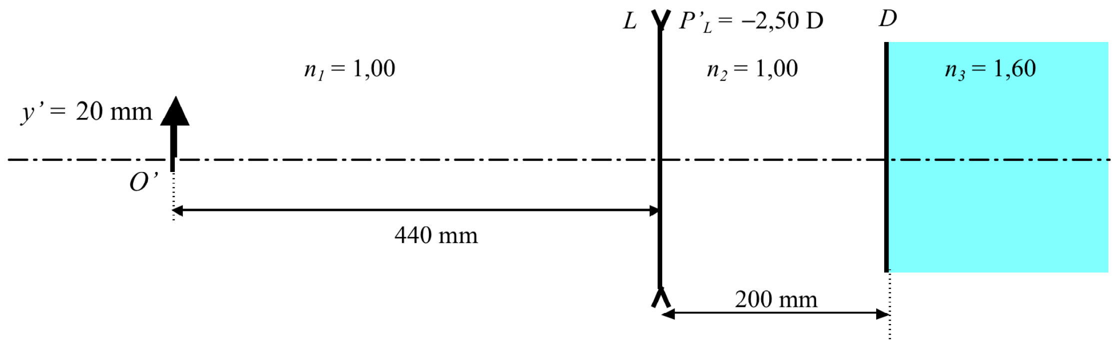
$$f = \frac{n}{P} = \frac{1{,}00}{2{,}50} = 0{,}400 \text{ m} = 400 \text{ mm}.$$

Posición de los planos principales:

$$H_1H = \frac{fe}{f_2} = \frac{400(200)}{\infty} = 0 \text{ mm} = L_1H.$$

$$H'_2H' = -\frac{f'e}{f'_1} = -\frac{-640(200)}{-400} = -320 \text{ mm} = D_2H'.$$

4. Conocida la posición y el tamaño de la imagen, determina la posición, el carácter y el tamaño del objeto en el sistema siguiente:



SOLUCIÓN:

Consideremos los elementos cardinales del sistema anterior:

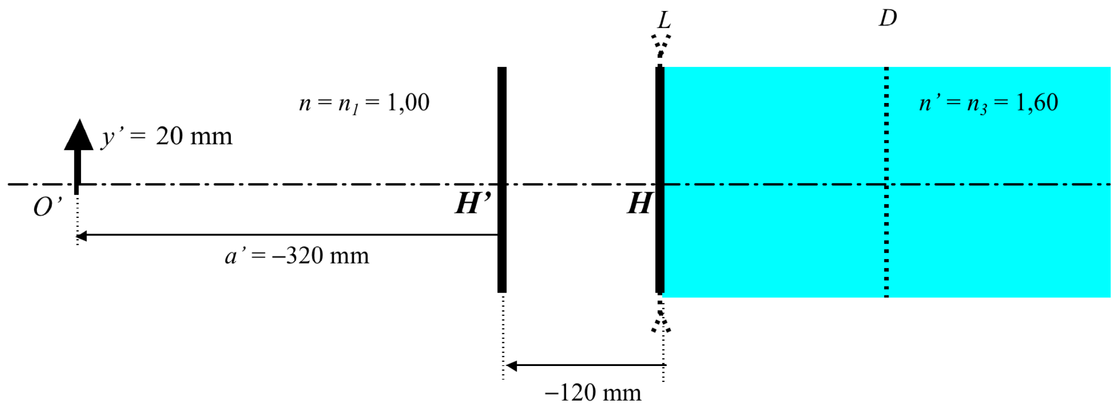


Figura 1

Aplicando la ecuación de Descartes:

$$-\frac{n}{a}+\frac{n'}{a'}=\frac{n'}{f'};\qquad n = 1{,}00;\qquad n' = 1{,}60;\qquad f' = -640 \text{ mm};\qquad a' = H'O' = -320 \text{ mm}.$$

$$-\frac{1{,}00}{a}+\frac{1{,}60}{-320}=\frac{1{,}60}{-640};\qquad \frac{1}{a}=\frac{1{,}60}{640}-\frac{1{,}60}{320}=\frac{1{,}60-3{,}20}{640}=-\frac{1{,}60}{640};$$

$$a = HO = -400 \text{ mm}.$$

La imagen es virtual por estar situada a la izquierda de la lente *L*.

$$m=\frac{y'}{y}=\frac{na'}{n'a}=\frac{1{,}00(-320)}{1{,}60(-400)}=\frac{1}{2};\qquad y=\frac{y'}{m}=\frac{20}{\frac{1}{2}}=40 \text{ mm}.$$

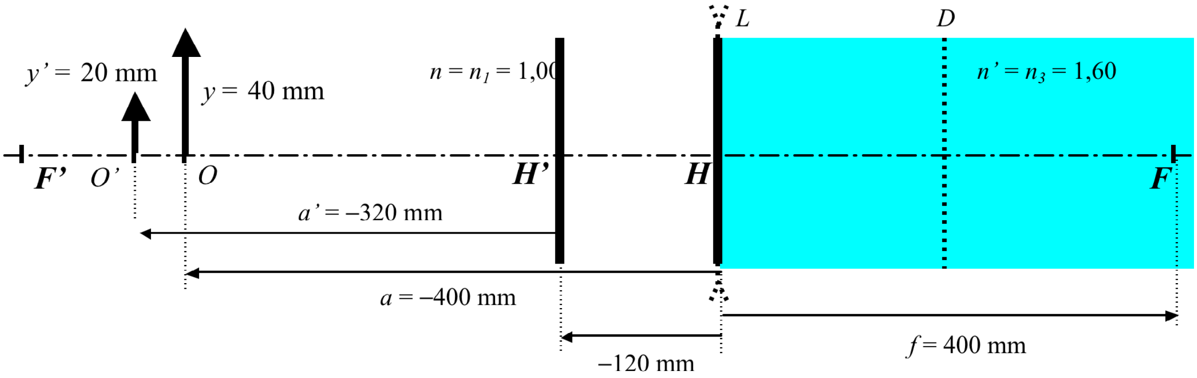


Figura 2

La distancia de la lente L al objeto es:

$$LO = LH + HO = 0 - 400 = -400 \text{ mm}.$$

El ejercicio también puede solucionarse considerando el sistema reducido en aire (Figura 3):

Debe tenerse en cuenta que la imagen O'_2, por ser imagen del dioptrio D, está sumergida en el medio de índice $n_3 = 1{,}60$.

$$s' = -640 \text{ mm}; \qquad \bar{s}' = \frac{s'}{n'} = \frac{-640}{1{,}60} = -400 \text{ mm}; \qquad DO' = DO'_2.$$

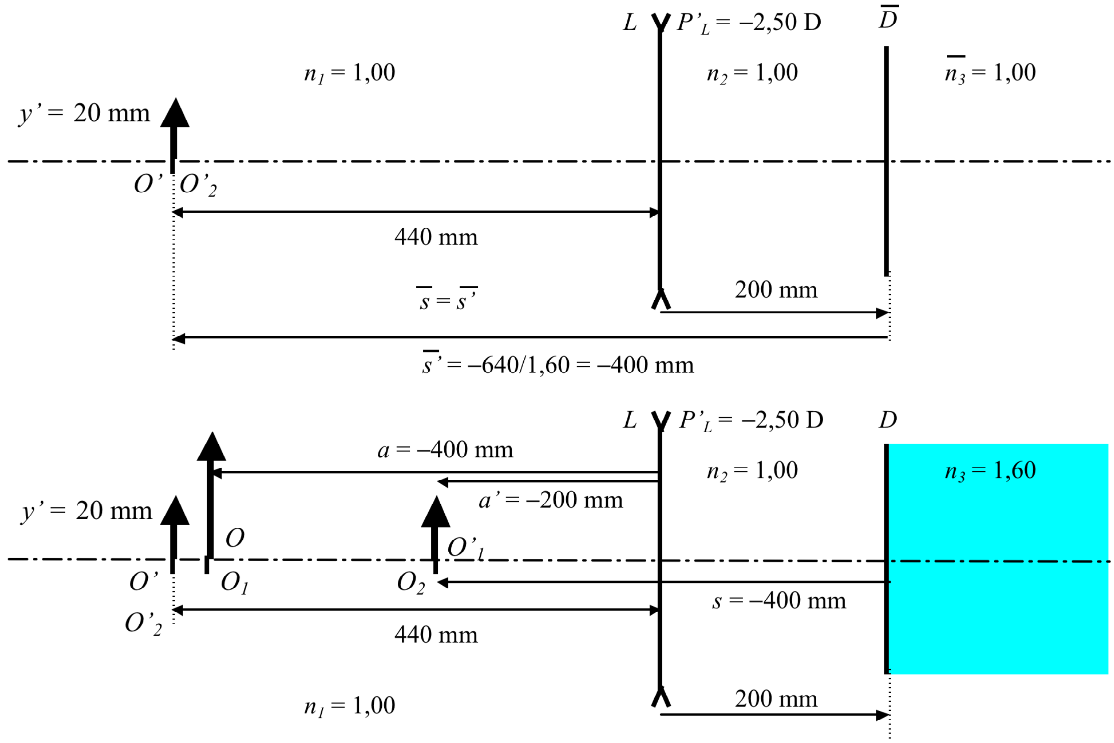


Figura 3

Conjugado objeto del dioptrio:

$$\bar{s} = \bar{s}'; \qquad \frac{s}{n} = \bar{s}'; \qquad \frac{s}{n_2} = \bar{s}'; \qquad s = n_2 \bar{s}' = 1{,}00(-400) = -400 \text{ mm} = DO_2.$$

Conjugado objeto a través de la lente L:

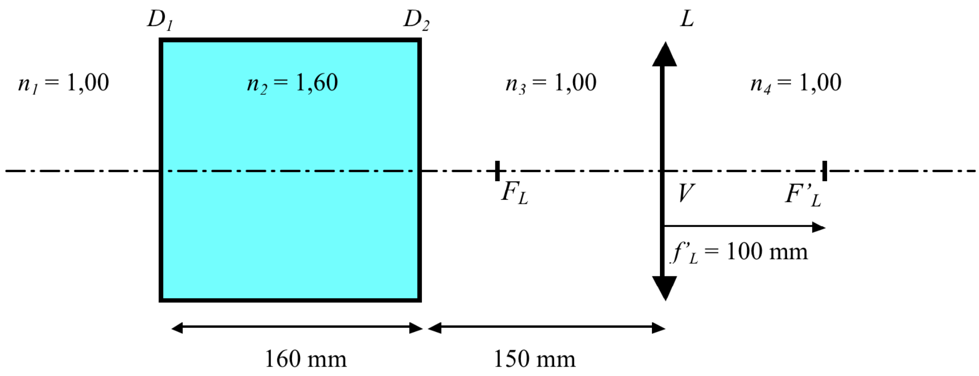
$$-\frac{n}{a} + \frac{n'}{a'} = \frac{n'}{f'}; \quad n = n_1 = 1{,}00; \quad n' = n_2 = 1{,}00; \quad f' = -400 \text{ mm}; \ a' = LO_1 = LO_2 = -200 \text{ mm}.$$

$$-\frac{1{,}00}{-a} + \frac{1{,}00}{-200} = \frac{1{,}00}{-400}; \qquad \frac{1}{a} = -\frac{1}{400} + \frac{1}{200} = \frac{1-2}{400} = -\frac{1}{400};$$

$a = -400$ mm $= LO_1 = LO$.

Resultado que coincide con el encontrado anteriormente.

5. Considera la asociación de una lámina planoparalela y una lente delgada que se muestra en la figura. Determina la posición de los elementos cardinales este sistema:



SOLUCIÓN:

a) Determinación de H' y F':

Utilizando trazado gráfico de rayos se deduce que H' coincide con la posición de L y F' con la posición de F'_L (Figura 1).

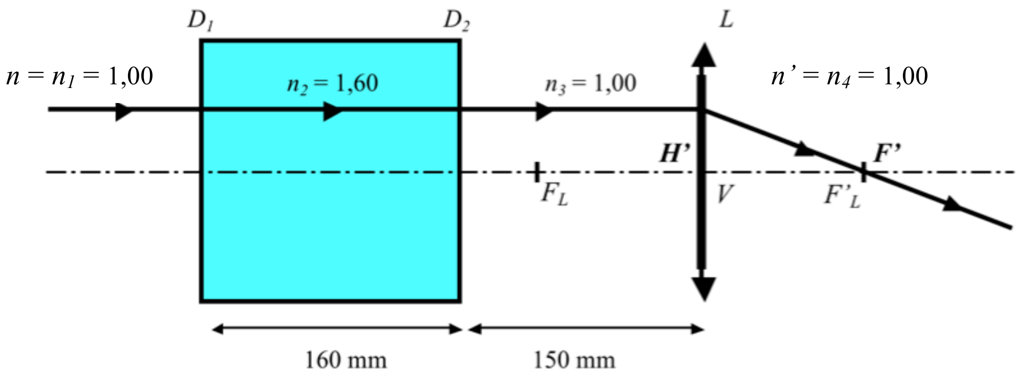


Figura 1

$$LH' = 0 \text{ mm.}$$

$$LF' = LF'_L = 100 \text{ mm.}$$

$$f' = H'F' = H'L + LF' = 100 \text{ mm.}$$

b) Determinación de H y F:

En la figura 2 se observa que F_L es el conjugado imagen de F a través de la lámina planoparalela formada por los dioptrios D_1 y D_2. Para ello basta considerar la trayectoria reversible del rayo de luz al atavesar la lámina planoparalela.

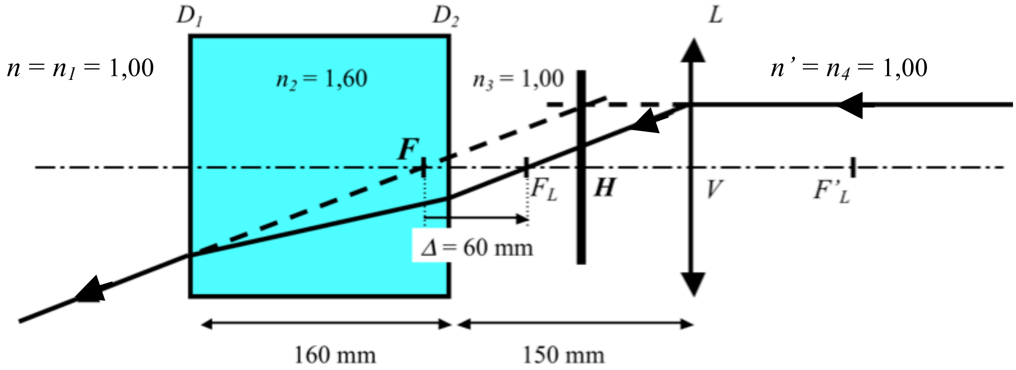


Figura 2

El desplazamiento, entre el objeto y la imagen, producido por una lámina planoparalela de índice n sumergida en aire vale:

$$\Delta = \frac{n-1}{n}d.$$

Sustituyendo en la ecuación anterior $n = n_2 = 1{,}60$ y $d = 160$ mm se obtiene:

$$\Delta = \frac{1{,}60-1}{1{,}60}160 = 60 \text{ mm}.$$

Por estar el sistema sumergido en medios extremos iguales ($n = n_1 = 1{,}00$ y $n' = n_4 = 1{,}00$) la focal objeto f del sistema vale:

$$f = HF = -100 \text{ mm}.$$

$$LF = LF_L + F_LF = LF_L - \Delta = -100 - 60 = -160 \text{ mm}.$$

$$D_1F = D_1L + LF = 310 - 160 = 150 \text{ mm}.$$

$$D_2F = D_2D_1 + D_1F = -160 + 150 = -10 \text{ mm}.$$

$$LH = LF + FH = -160 + 100 = -60 \text{ mm}.$$

Los resultados obtenidos demuestran que la posición de los elementos cardinales es independiente de la distancia que separa la lámina planoparalela de la lente (150 mm).

La posición de F puede determinarse también a partir del sistema reducido en aire (Figura 3).

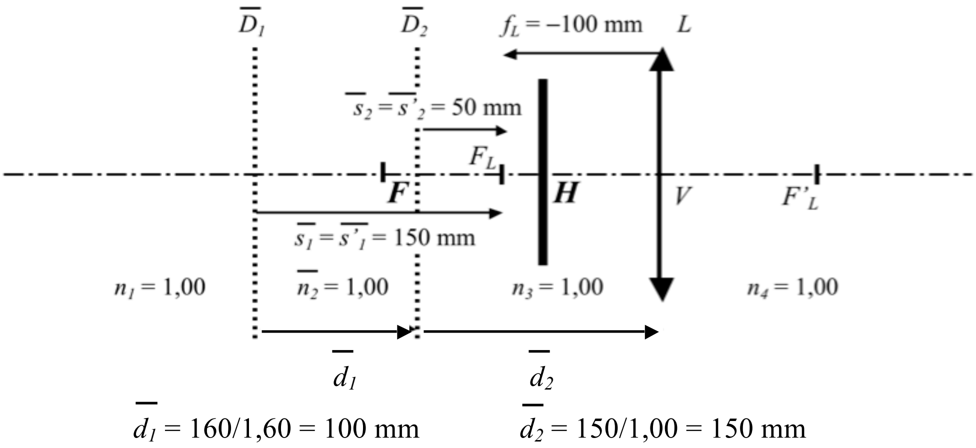


Figura 3

$$\overline{s'}_1 = \overline{s}_1\,; \qquad \frac{s'_1}{n'_1} = \frac{s_1}{n_1}\,.$$

$$s_1 = n_1 \overline{s}_1 = 1{,}00(150) = 150 \text{ mm} = D_1F.$$

Valor que coincide con el encontrado anteriormente.

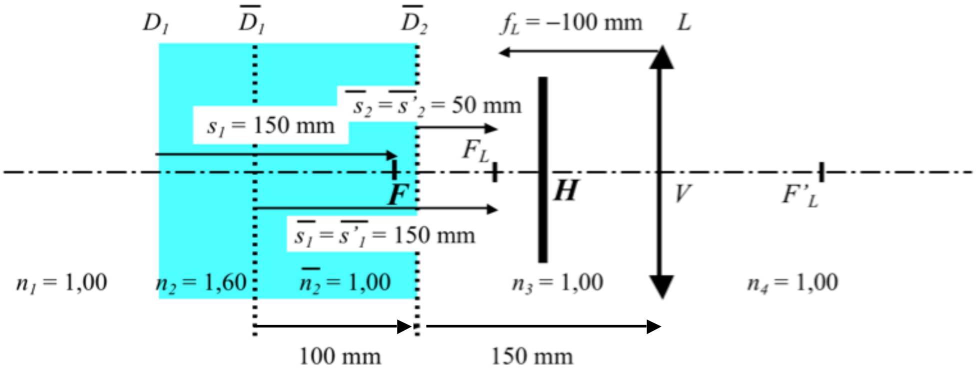


Figura 4

La figura 5 muestra la posición de los elementos cardinales del sistema anterior.

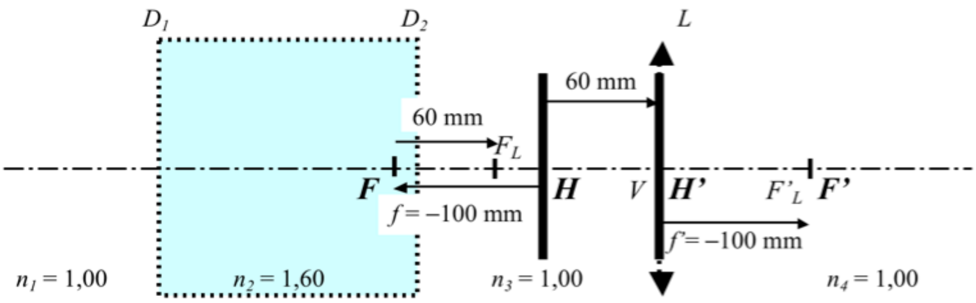
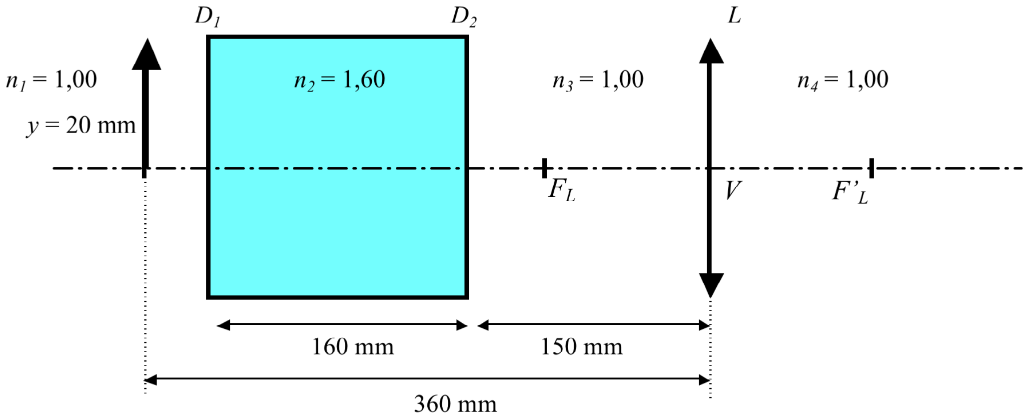


Figura 5

6. Determina la posición, el carácter y el aumento de la imagen en el caso siguiente:



SOLUCIÓN:

Consideremos los elementos cardinales del sistema anterior:

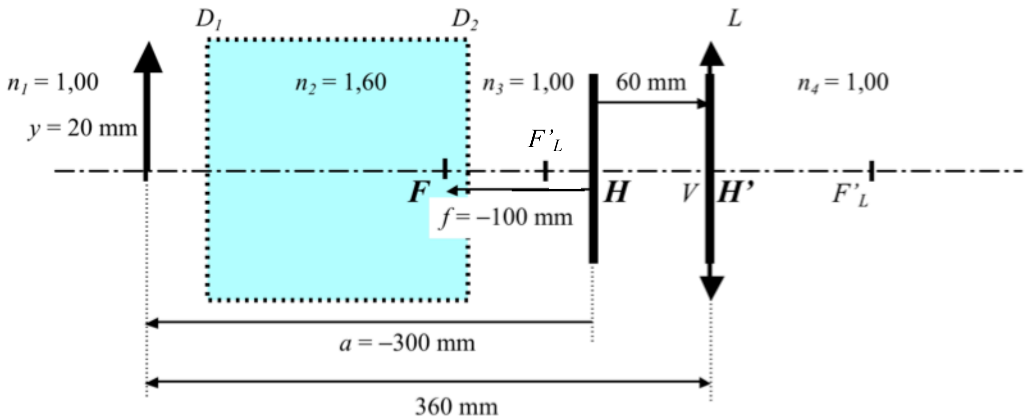


Figura 1

Aplicando la ecuación de Descartes:

$$-\frac{n}{a}+\frac{n'}{a'}=\frac{n'}{f'} \qquad n = 1{,}00; \qquad n' = 1{,}00; \qquad f' = 100 \text{ mm}; \qquad a = HO = -300 \text{ mm}.$$

$$-\frac{1}{-300}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{100}; \qquad \frac{1}{a'}=\frac{1}{100}-\frac{1}{300}=\frac{3-1}{300}=\frac{2}{300}=\frac{1}{150};$$

$a' = H'O' = LO' = 150$ mm.

$$m=\frac{y'}{y}=\frac{a'}{a}=\frac{150}{-300}=-\frac{1}{2}$$

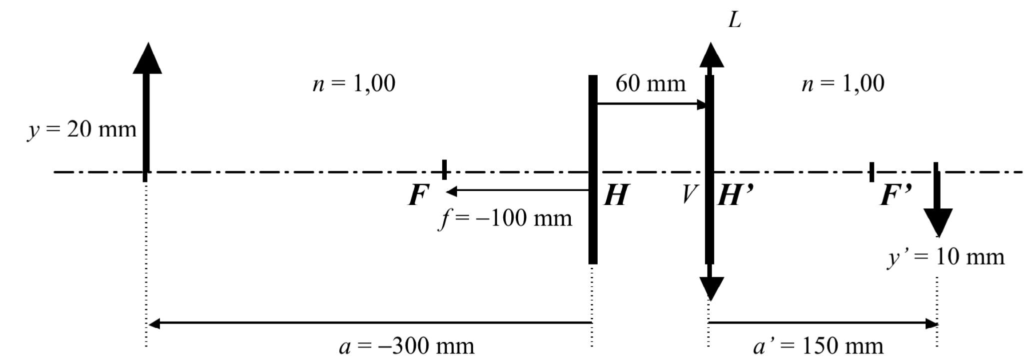


Figura 2

La imagen es real por estar situada a la derecha de la lente L, invertida y de tamaño igual a la mitad del objeto.

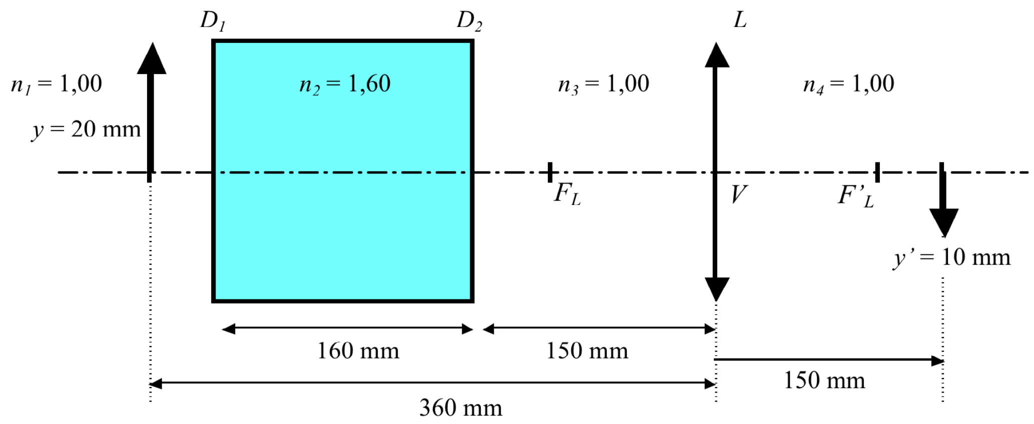


Figura 3

Otra manera de hacerlo sería a partir de la acción encadenada de los diferentes elementos que configuran el sistema.

a) Imagen formada por la lámina planoparalela (Dioptrios D_1 y D_2):

El desplazamiento Δ producido por la lámina planoparalela es:

$$\Delta = \frac{n-1}{n}d = \frac{1{,}60-1}{1{,}60}160 = 60 \text{ mm.}$$

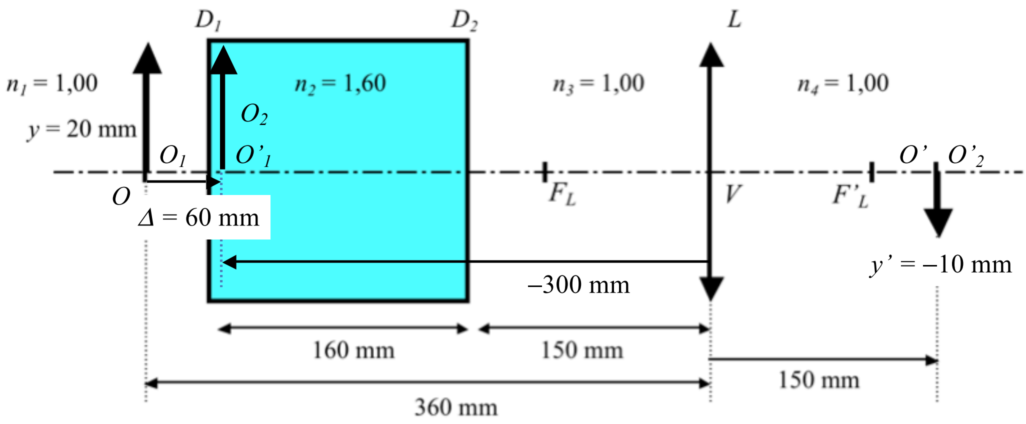
b) Imagen formada por la lente L:

$$-\frac{n}{a}+\frac{n'}{a'}=\frac{n'}{f'}; \qquad n = n_3 = 1{,}00; \qquad n' = n_4 = 1{,}00; \qquad f' = 100 \text{ mm}; \qquad a = LO_2 = -300 \text{ mm.}$$

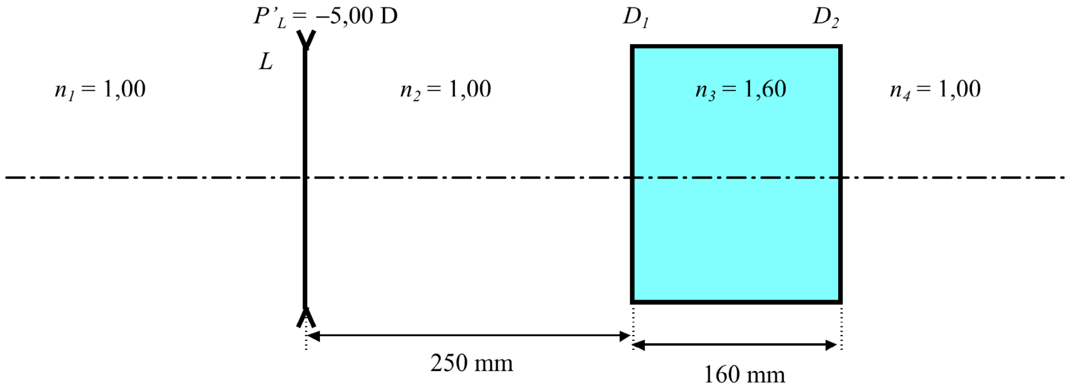
$$-\frac{1}{-300}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{100}; \qquad \frac{1}{a'}=\frac{1}{100}-\frac{1}{300}=\frac{3-1}{300}=\frac{2}{300}=\frac{1}{150}; \qquad a' = 150 \text{ mm.}$$

El aumento lateral del sistema es el de la lente:

$$m = m_L = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} = \frac{150}{-300} = -\frac{1}{2}$$



7. Considera la asociación de una lente delgada negativa y una lámina planoparalela según se muestra en la figura. Determina la posición de los elementos cardinales de este sistema:



SOLUCIÓN:

Distancias focales de la lente L:

$$f'_L = \frac{n'}{P'_L} = \frac{n_2}{P'_L} = \frac{1{,}00}{-5{,}00} = -0{,}200\ \text{m} = -200\ \text{mm}.$$

Por estar sumergida en medios extremos iguales:

$f_L = -f'_L = -(-200) = 200$ mm.

a) Determinación de H y F:

Mediante trazado gráfico se observa que H coincide con la posición de L y F con la posición de F_L (Figura 1).

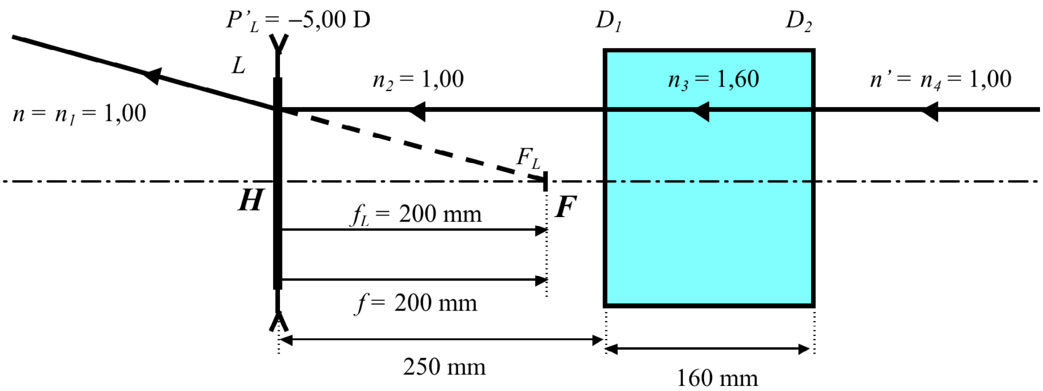


Figura 1

$$LH = 0 \text{ mm.}$$

$$LF = LF_L = 200 \text{ mm.}$$

$$f = HF = HL + LF = 0 + 200 = 200 \text{ mm.}$$

b) Determinación de *F'* y *H'*:

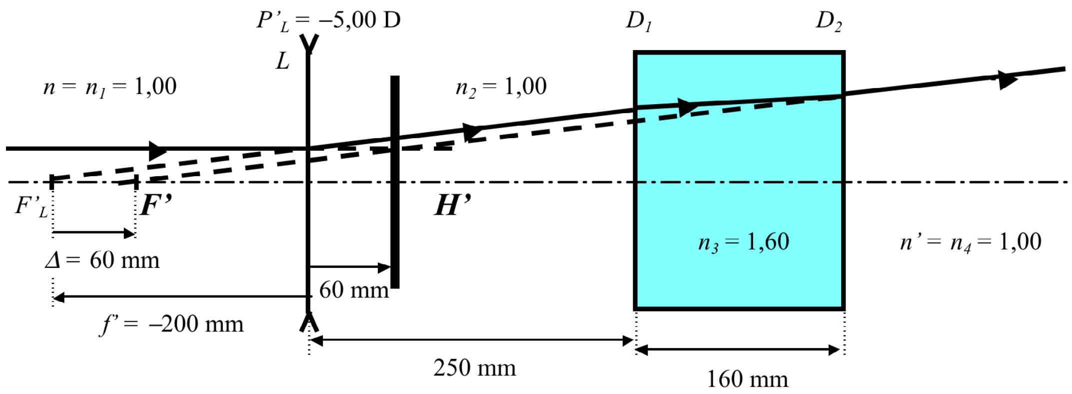


Figura 2

Por estar el sistema sumergido en medios extremos iguales ($n = n_1 = 1{,}00$ y $n' = n_4 = 1{,}00$) la focal imagen f' del sistema es igual a la focal objeto cambiada de signo.

$$f' = -f = -200 \text{ mm.}$$

$$f' = H'F' = -200 \text{ mm.}$$

Posición de *F'*:

En la figura 2 se observa que *F'* es el conjugado imagen de F'_L a través de la lámina planoparalela formada por los dioptrios D_1 y D_2.

El desplazamiento entre el objeto y la imagen producido por una lámina planoparalela de índice *n* sumergida en aire vale:

$$\Delta = \frac{n-1}{n} d.$$

Sustituyendo en la ecuación anterior $n = n_3 = 1{,}60$ y $d = 160$ mm se obtiene:

$$\Delta = \frac{1{,}60 - 1}{1{,}60} 160 = 60 \text{ mm.}$$

$$LF' = LF'_L + F'_L F' = -200 + 60 = -140 \text{ mm.}$$

$$D_2F' = D_2D_1 + D_1L + LF' = -100 - 250 - 200 = -550 \text{ mm.}$$

$$LH' = LF' + F'H' = -140 + 200 = 60 \text{ mm}.$$

La posición de *F'* puede determinarse también a partir del sistema reducido en aire.

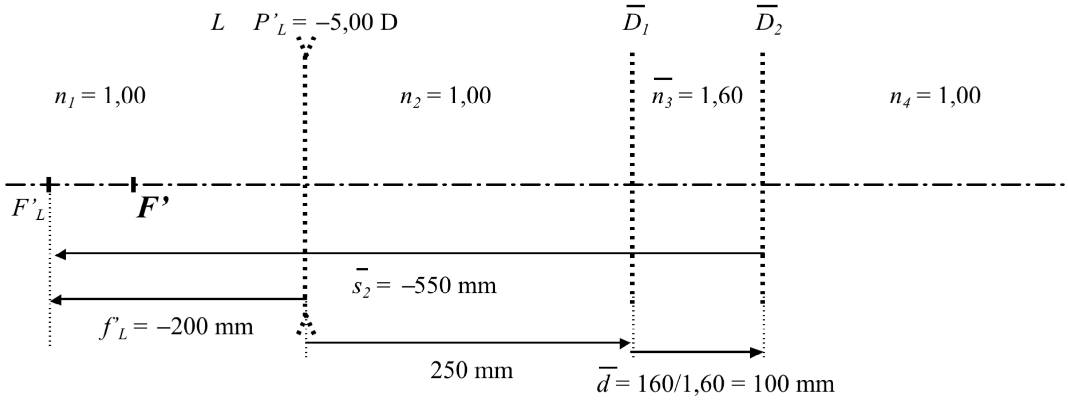


Figura 3

$$\overline{s'_2} = \overline{s_2}\,; \qquad \frac{s'_2}{n'_2} = \frac{s_2}{n_2}\,.$$

$$s'_2 = n'_2\,\overline{s_2}\,;$$

Teniendo en cuenta que $n'_2 = n_4 = 1{,}00$.

$$s'_2 = 1{,}00(-550) = -550 \text{ mm} = D_2F'.$$

Valor que coincide con el encontrado anteriormente.

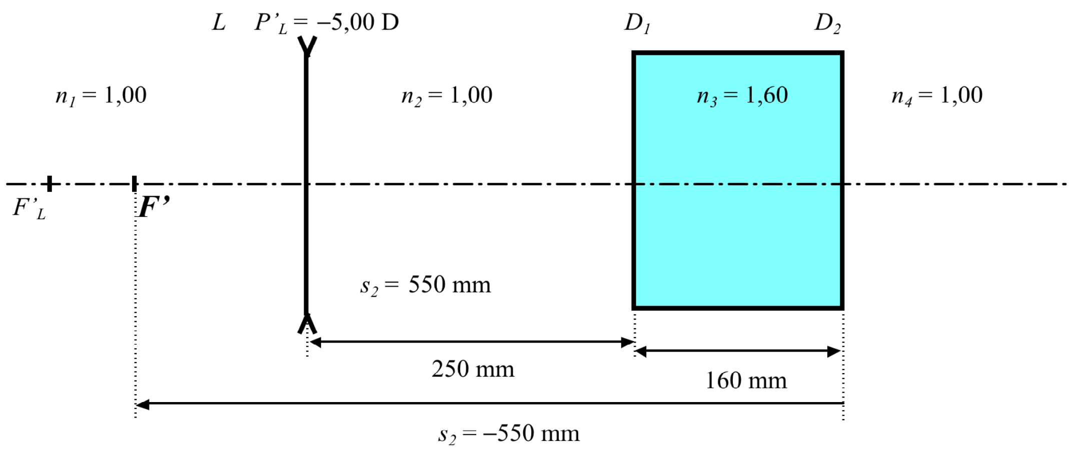


Figura 4

Igualmente se puede proceder con la posición de *H'*. *H'* es el conjugado imagen de *H* a través del sistema. Debido que la posición de *H* coincide con la de *L*, *H'* es el conjugado imagen de *H* a través de la lámina planoparalela formada por los dioptrios D_1 y D_2.

Teniendo en cuenta que la lámina planoparalela produce, entre el objeto *H* y la imagen *H'*, un desplazamiento Δ de valor:

$$\Delta = \frac{n-1}{n} d.$$

Sustituyendo en la ecuación anterior $n = n_3 = 1{,}60$ y $d = 160$ mm se obtiene:

$$\Delta = \frac{1{,}60 - 1}{1{,}60} 160 = 60 \text{ mm}.$$

$$HH' = \Delta = 60 \text{ mm}.$$

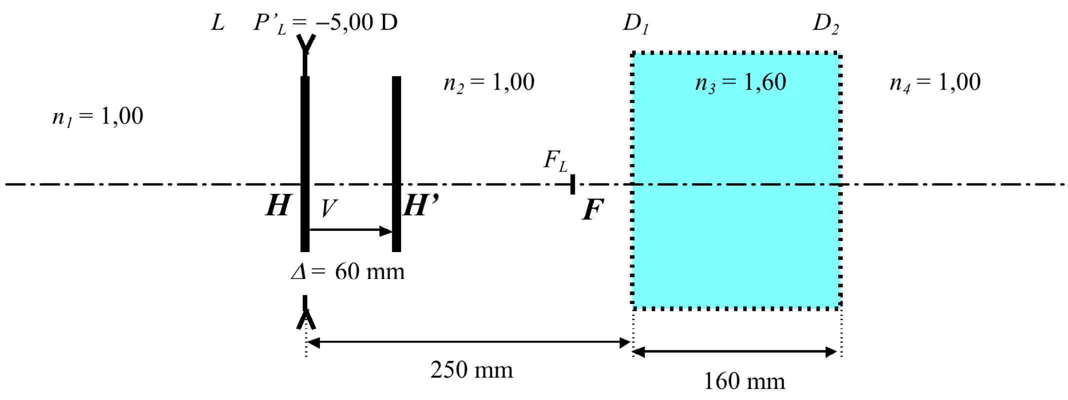


Figura 5

La posición de *H'* también puede obtenerse utilizando distancias reducidas:

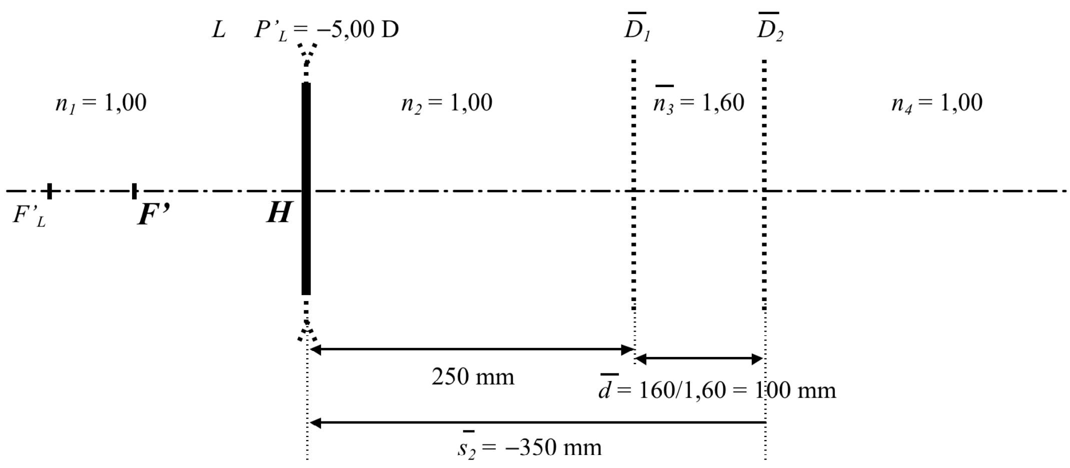


Figura 6

$$\overline{s'_2} = \overline{s_2}\,; \qquad \frac{s'_2}{n'_2} = \frac{s_2}{n_2}\,.$$

$$s'_2 = n'_2 \overline{s_2}\,;$$

Teniendo en cuenta que $n'_2 = n_4 = 1{,}00$.

$$s'_2 = 1{,}00(-350) = -350 \text{ mm} = D_2H'.$$

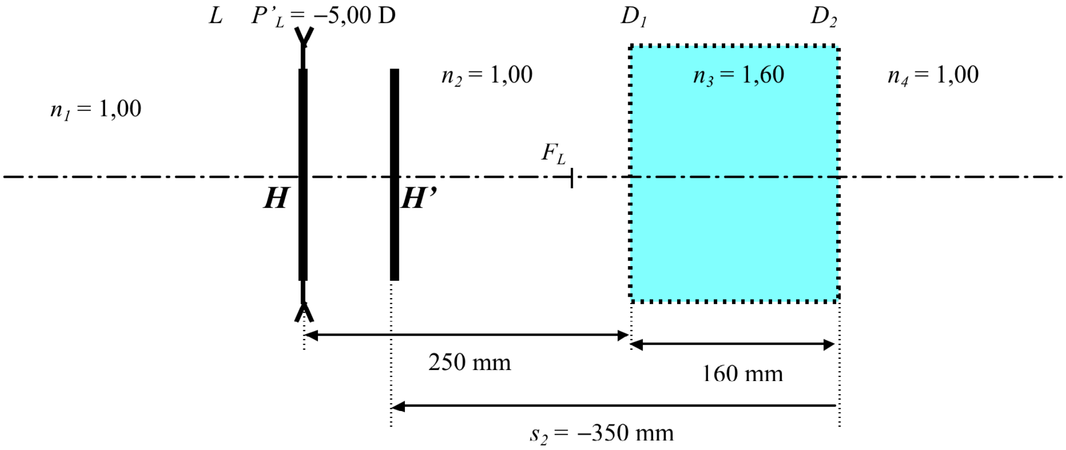
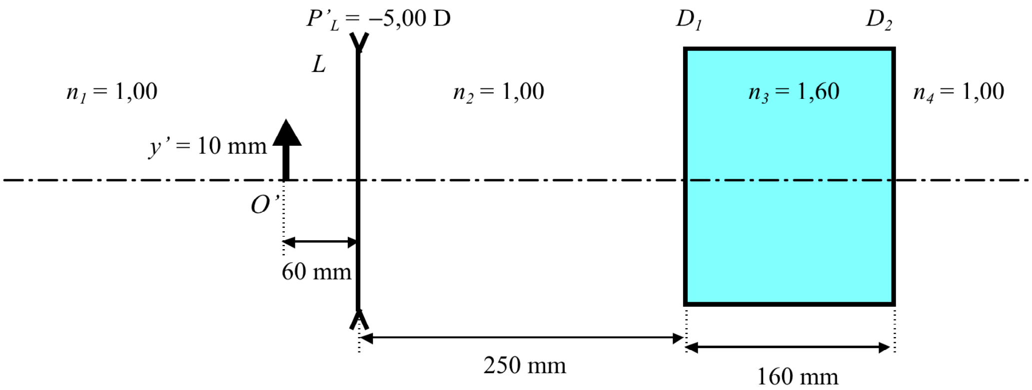


Figura 7

8. Conocida la posición y el tamaño de la imagen, determina la posición, el carácter y el tamaño del objeto en el sistema siguiente:



SOLUCIÓN:

Consideremos los elementos cardinales del sistema anterior:

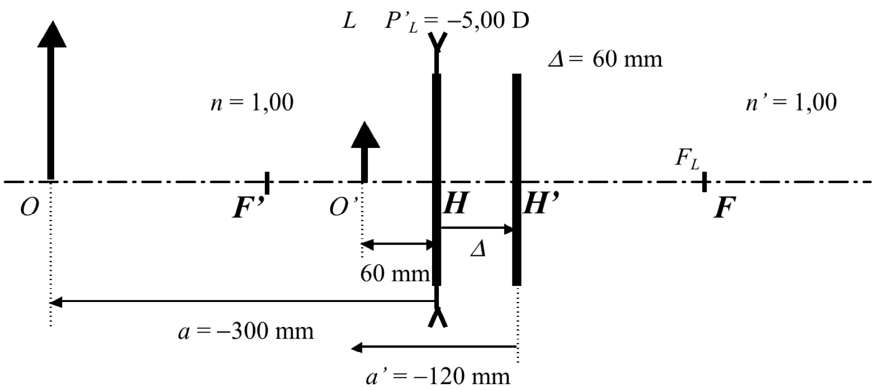


Figura 1

Se trata de una imagen virtual por estar situada a la izquierda de la última superficie del sistema (D_2).

Aplicando la ecuación de Descartes:

$$-\frac{n}{a}+\frac{n'}{a'}=\frac{n'}{f'} \qquad n = 1{,}00; \qquad n' = 1{,}00; \qquad f' = -200 \text{ mm}; \qquad a' = H'O' -120 \text{ mm}.$$

$$-\frac{1{,}00}{a}+\frac{1{,}00}{-120}=\frac{1{,}00}{-200}; \qquad \frac{1}{a}=\frac{1}{200}-\frac{1}{120}=\frac{3-5}{600}=-\frac{2}{600}; \qquad a = HO = LO = -300 \text{ mm}.$$

$$m=\frac{y'}{y}=\frac{a'}{a}=\frac{-120}{-300}=0{,}40; \qquad y=\frac{y'}{m}=\frac{10}{0{,}40}=25 \text{ mm};$$

El objeto es real por estar situado a la izquierda de la primera superficie del sistema (L).

La imagen es virtual por estar situada a la izquierda de última superficie del sistema (D_2), derecha y de tamaño menor que el objeto.

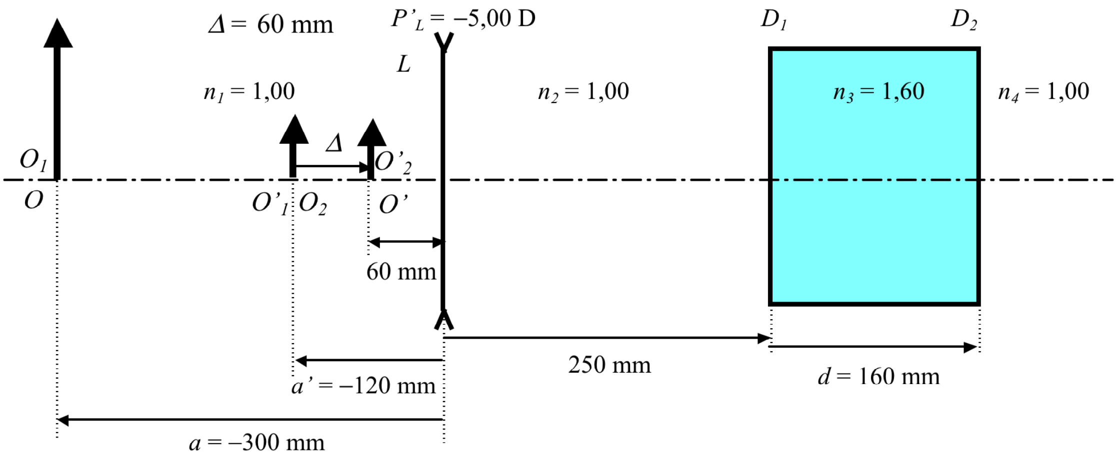


Figura 3

Otra manera de hacerlo sería a partir de la acción encadenada de los diferentes elementos que configuran el sistema.

a) Conjugado objeto a través de la lámina planoparalela.

El desplazamiento entre el objeto y la imagen en una lámina planoparalela sumergida en aire vale:

$$\Delta = O_2O'_2 = \frac{n-1}{n}d = \frac{1,60-1}{1,60}160 = 60 \text{ mm}.$$

El tamaño del objeto es el mismo que el de la imagen.

b) Conjugado objeto a través de la lente.

$$-\frac{n}{a}+\frac{n'}{a'}=\frac{n'}{f'}; \qquad n = n_1 = 1{,}00; \qquad n' = n_2 = 1{,}00; \qquad f' = -200 \text{ mm}; \qquad a' = -120 \text{ mm}.$$

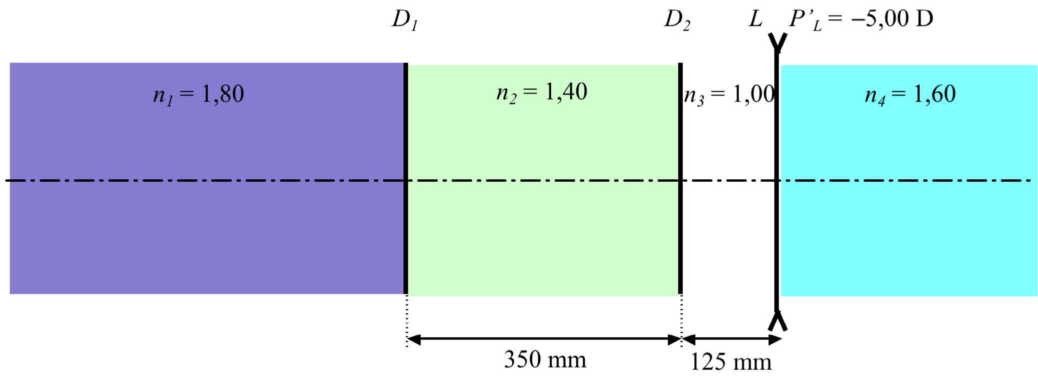
$$-\frac{1,00}{a}+\frac{1,00}{-120}=\frac{1,00}{-200}; \qquad \frac{1}{a}=\frac{1}{200}-\frac{1}{120}=\frac{3-5}{600}=-\frac{2}{600}; \qquad a = -300 \text{ mm}.$$

$$m_L = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} = \frac{-120}{-300} = 0,40.$$

Tamaño del objeto:

$$y = \frac{y'}{m} = \frac{10}{0,40} = 25 \text{ mm}.$$

9. Sea un sistema formado por los dioptrios planos D_1 y D_2 y la lente delgada L de potencia $P' = -5{,}00$ D según se muestra en la figura. Determina la posición de los elementos cardinales de este sistema.



SOLUCIÓN:

Distancias focales de la lene L:

$$f'_L = \frac{n'}{P'_L} = \frac{n_4}{P'_L} = \frac{1{,}60}{-5{,}00} = -0{,}320 \text{ m} = -320 \text{ mm}.$$

$$P_L = -P'_L.$$

$$f_L = \frac{n}{P_L} = \frac{n_3}{P_L} = \frac{1{,}00}{5{,}00} = 0{,}200 \text{ m} = 200 \text{ mm}.$$

a) Determinación de H' y F':

Utilizando trazado gráfico de rayos se deduce que H' coincide con la posición de L y F' con la posición de F_L (Figura 1).

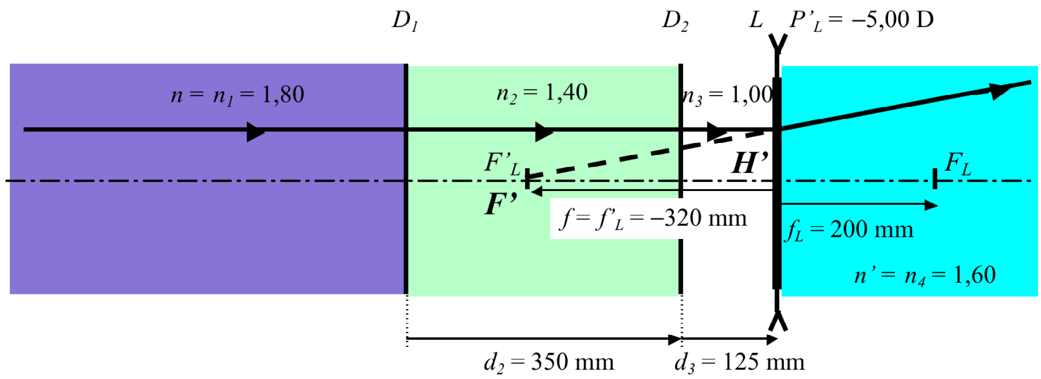


Figura 1

$$LH' = 0 \text{ mm}.$$

$$LF' = LF'_L = -320 \text{ mm}.$$

$$f' = H'F' = H'L + LF' = 0 - 320 = -320 \text{ mm}$$

La potencia imagen P' del sistema es:

$$P' = \frac{n'}{f'} = \frac{1,60}{-0,320} = -5,00 \text{ D.}$$

Valor que coincide con la potencia de la lente L.

b) Determinación de H y F:

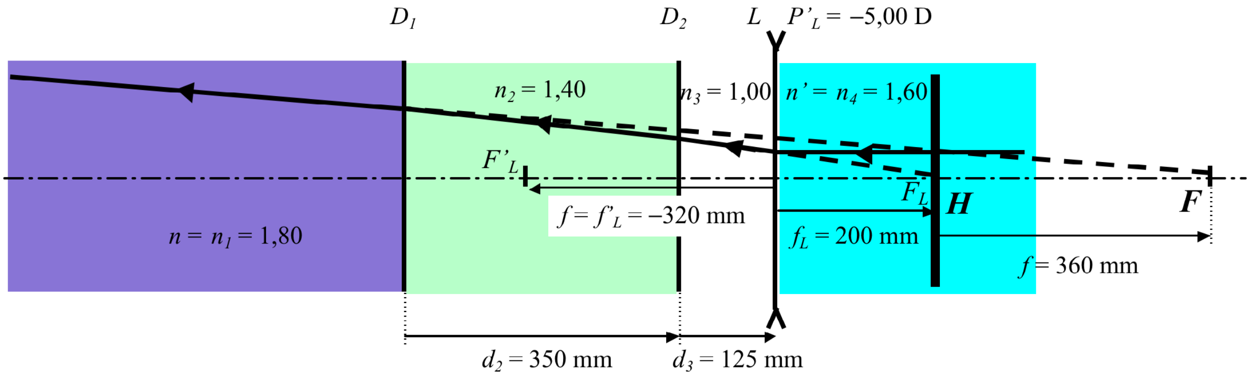


Figura 2

$$P = -P'; \qquad \frac{n}{f} = -\frac{n'}{f'}; \qquad \frac{n_1}{f} = -\frac{n_4}{f'}; \qquad \frac{1,80}{f} = -\frac{1,60}{-320};$$

$$f = -\frac{1,80(-320)}{1,60} = 360 \text{ mm} = HF.$$

Las distancias focales f y f' son diferentes en valores absolutos por estar el sistema sumergido en medios extremos diferentes.

Si consideramos la reversibilidad del rayo de luz, la figura 3 muestra que F_L es el conjugado imagen de F a través de los dioptrios D_1 y D_2.

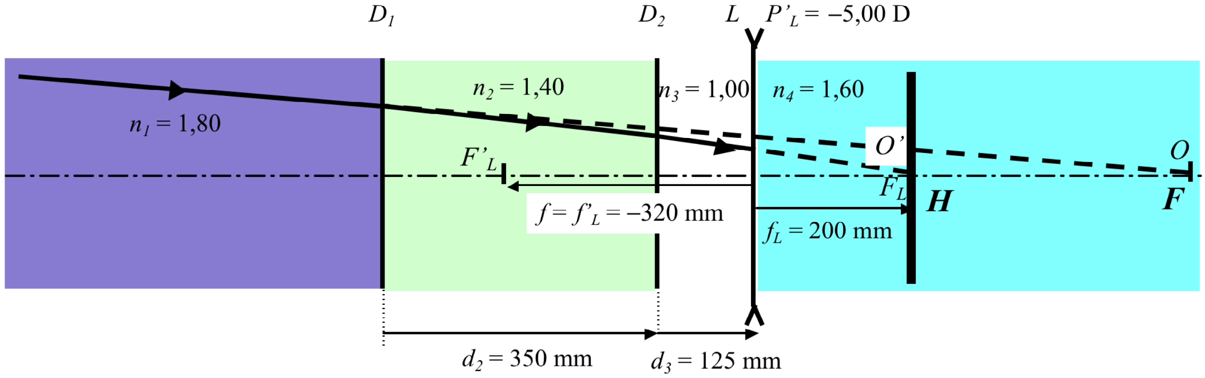


Figura 3

Posición de F:

Si reducimos el sistema en aire (Figura 4).

$$\overline{d_2} = \overline{D_1 D_2} = \frac{350}{1{,}40} = 250 \text{ mm}.$$

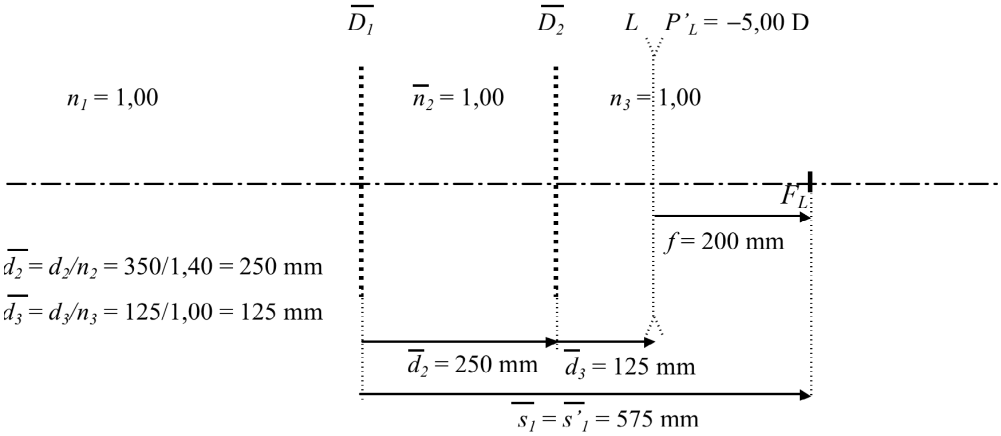


Figura 4

$$\overline{s_1} = \overline{s'_1}; \qquad \frac{s_1}{n_1} = \overline{s'_1}; \qquad s_1 = 1{,}80(575) = 1035 \text{ mm} = D_1F.$$

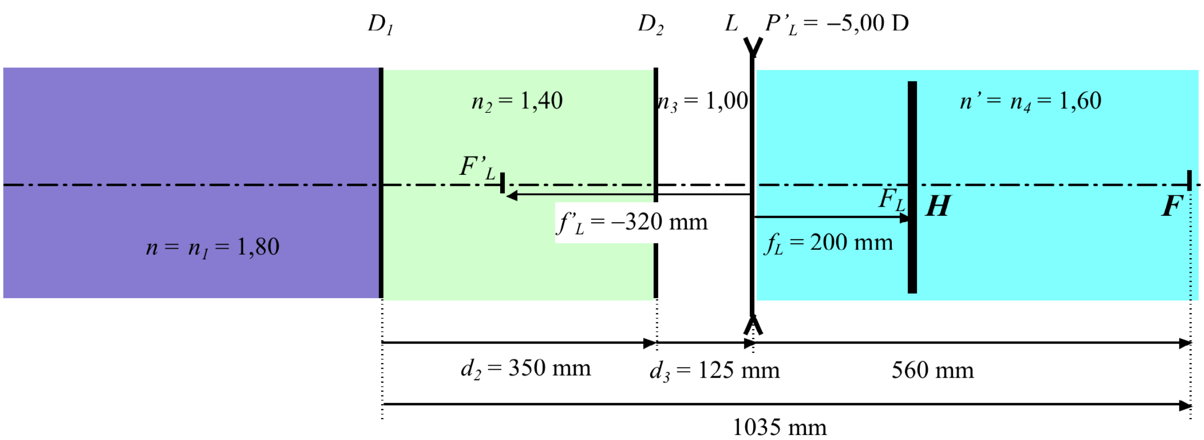


Figura 5

$$LF = LD_1 + D_1F = -475 + 1035 = 560 \text{ mm}.$$

Posición de H:

H es el conjugado objeto de H' a través del sistema óptico. Debido que H' está situado en la posición de L, H es el conjugado objeto de H' a través de los dioptrios D_1 y D_2.

Consideremos el sistema reducido en aire (Figura 6):

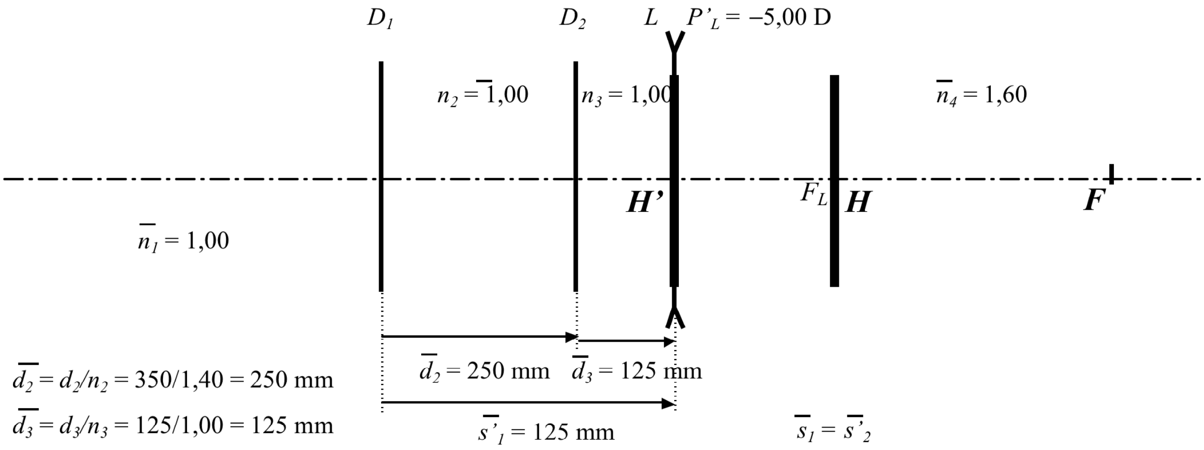


Figura 6

$$\overline{s_1} = \overline{s'_1}; \qquad \frac{s_1}{n_1} = \overline{s'_1}; \qquad s_1 = 1{,}80(375) = 675 \text{ mm} = D_1H.$$

$$LH = LD_1 + D_1H = -475 + 675 = 200 \text{ mm}.$$

$$HH' = HL + LH' = -200 + 0 = -200 \text{ mm}.$$

El sistema anterior es equivalente a:

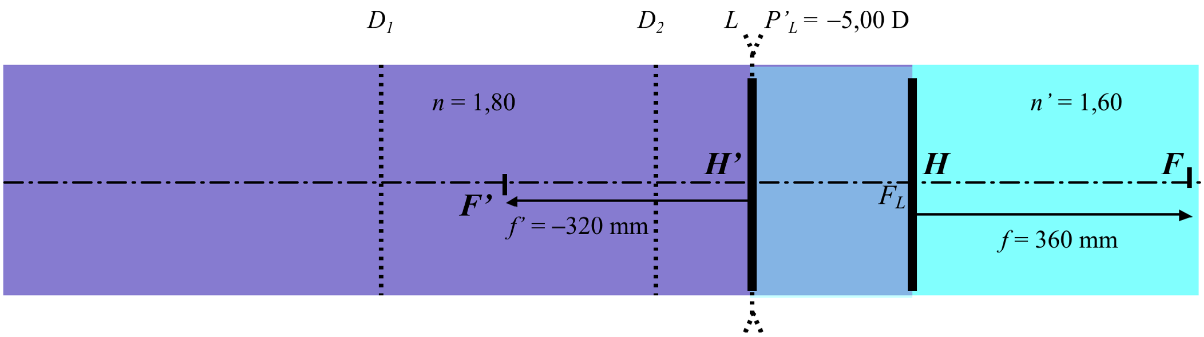
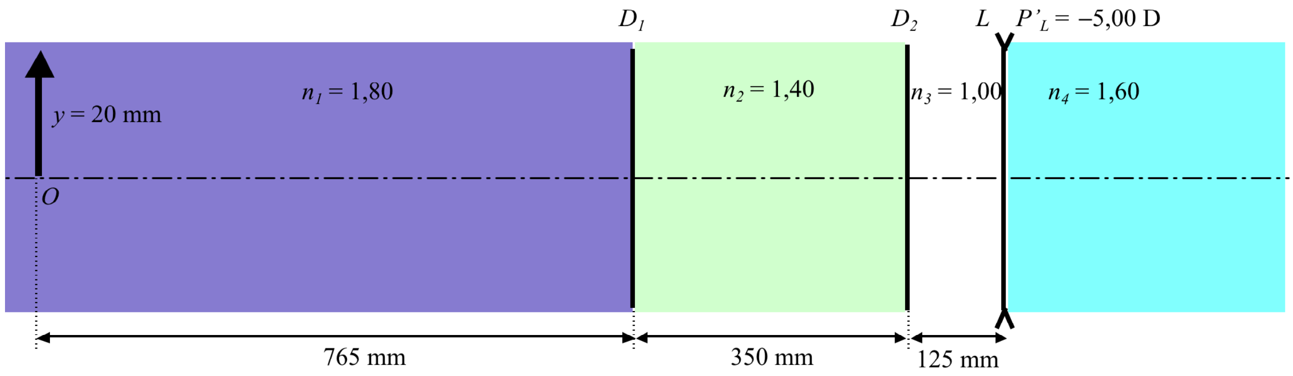


Figura 7

10. Conocida la posición y el tamaño del objeto, determina la posición, el carácter y el tamaño de la imagen en el sistema siguiente:



SOLUCIÓN:

Consideremos los elementos cardinales del sistema anterior:

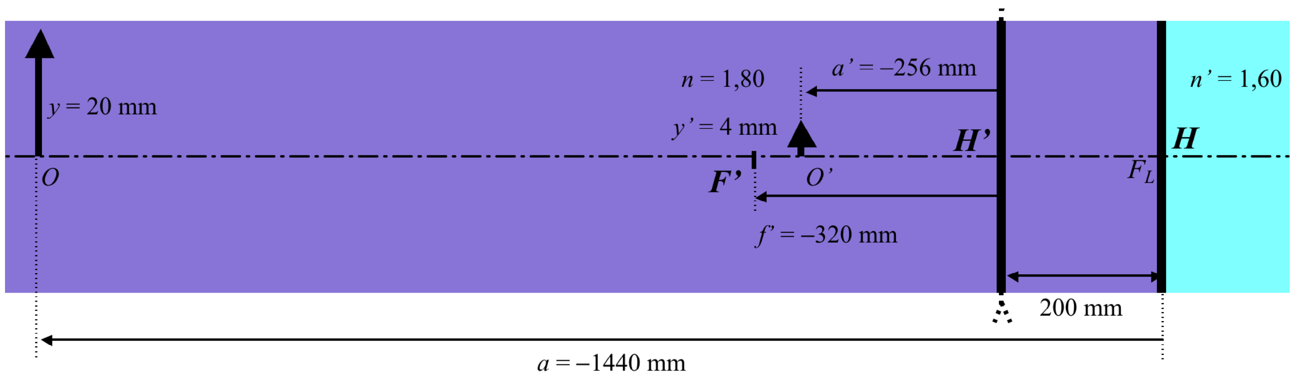


Figura 1

$$-\frac{n}{a}+\frac{n'}{a'}=\frac{n'}{f'}; \qquad n = 1{,}80; \qquad n' = 1{,}60; \qquad f' = -320 \text{ mm}; \qquad a = HO = -1440 \text{ mm}.$$

$$-\frac{1{,}80}{-1440}+\frac{1{,}60}{a'}=\frac{1{,}60}{-320}; \qquad \frac{1{,}60}{a'}=-\frac{1{,}60}{320}-\frac{1{,}80}{1440}=\frac{-14{,}4-3{,}60}{2880}=-\frac{18{,}00}{2880};$$

$$a' = HO' = -\frac{1{,}60(2880)}{18} = -256 \text{ mm}. \qquad LO' = LH' + H'O' = 0 - 256 = -256 \text{ mm}.$$

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{na'}{n'a} = \frac{1{,}80(-256)}{1{,}60(-1440)} = 0{,}20.$$

$$y' = my = 0{,}20(20) = 4 \text{ mm}.$$

Otra manera de hacerlo sería a partir de la acción encadenada de los diferentes elementos que configuran el sistema.

Si consideremos el sistema reducido en aire:

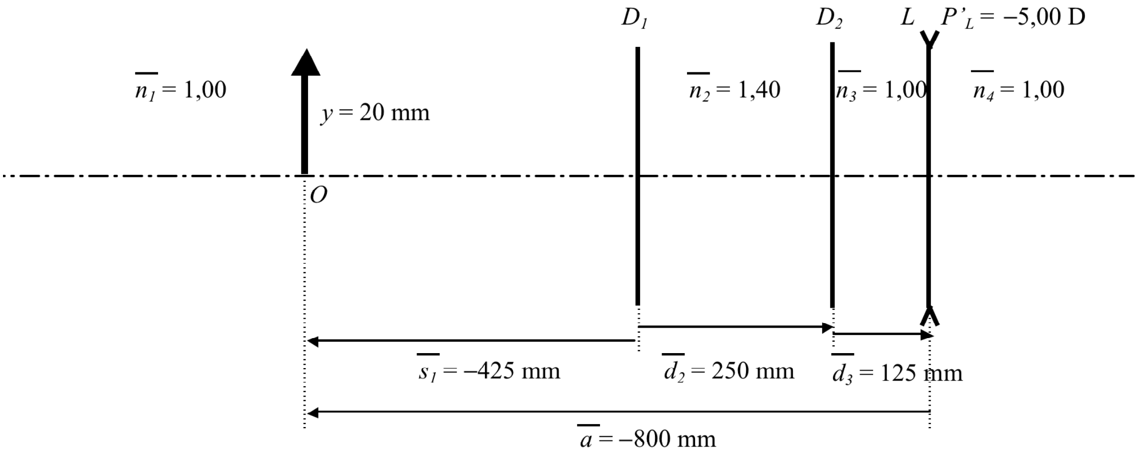


Figura 2

$$-\frac{1}{\overline{a}}+\frac{1}{\overline{a}'}=\frac{1}{\overline{f}'}; \qquad \overline{a} = -800 \text{ mm}; \qquad \overline{f}' = \frac{f'}{n'} = \frac{-320}{1,60} = -200 \text{ mm}.$$

$$-\frac{1}{-800}+\frac{1}{\overline{a}'}=\frac{1}{-200}; \qquad \frac{1,}{\overline{a}'} = -\frac{1}{200}-\frac{1}{800} = \frac{-4-1}{800} = -\frac{5}{800}; \qquad \overline{a}' = -160 \text{ mm}.$$

$$\overline{a}' = \frac{a'}{n'}; \qquad a' = n'\overline{a}' = 1,60\left(-160\right) = -256 = LO'.$$

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{\overline{a}'}{\overline{a}} = \frac{-160}{-800} = 0,20.$$

$$y' = my = 0,20\left(20\right) = 4 \text{ mm}.$$